FOK FAZOSI VA UNDA ANIQLANGAN AYRIM OPERATORLAR HAQIDA

Yaxyoyeva Sharofat Mirmuhsin qizi
Buxoro davlat universiteti magistri

https://doi.org/10.5281/zenodo.7422446

Annotatsiya. *Maqolada Fok fazosi va unda aniqlangan ayrim operatorlar haqida ma'lumotlar keltirilgan. Mavzuni talabalarga tushuntirish va ularni oson tushunishlari uchun mavzuni yoritish bo'yicha sxema va atamalarning osondan-murakkabga qarab keltirilishi bo'yicha tavsiyalar berilgan hamda bir qator tipik misollar echib ko'rsatilgan.*

Kalit so'zlar: *Fok fazosi, operatorlar, Hilbert fazosi, qirqilgan m – zarrachali qism fazo, fiksirlangan natural son, vektor – funksiyaning normasi, skalyar ko'paytma, norma, bir o'lchamli chiziqli fazo, chiziqli fazolar, ekvivalent, argument, kompleks qiymatli funksiya, matritsaviy elementlar, uzluksiz funksiyalar, parameter, haqiqiy o'zgaruvchili funksiya, operator elementi.*

ПРОСТРАНСТВА ФОКА И О ОПЕРАТОРАХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ В НЁМ

Аннотация. *В статье приведены сведения о пространстве Фока и некоторых определенных в нем операторах. Для того, чтобы объяснить тему студентам и облегчить их понимание, приведена схеме освещения темы и даны рекомендации по изложению терминов от простого к сложному, а также показан ряд типичных примеров.*

Ключевые слова: *пространство Фока, операторы, гильбертово пространство, m –усеченно-частичное пространство, фиксированное натуральное число, норма вектор-функции, скалярное произведение, норма, одномерное линейное пространство, линейные пространства, эквивалентность, аргумент, функция комплексного значения, матрицы элементы, непрерывные функции, параметр, функция действительного переменного, элемент оператора.*

ABOUT FOCUS SPACE AND CERTAIN OPERATORS DEFINED IN IT

Abstract. *The article provides complete information about the Fock space and some operators identified in it. In order to explain the topic to students and make it easier for them to understand, recommendations are given on the scheme of covering the topic and the presentation of terms from easy to complex, and a number of typical examples are shown.*

Keywords: *Fock space, operators, Hilbert space, clipped - particle space, fixed natural number, vector - norm of a function, scalar product, norm, one-dimensional linear space, linear spaces, equivalence, argument, complex value function, matrix elements, continuous functions, parameter, real variable function, operator element.*

Hozirgi vaqtda O'zbekistonda o'rta va oliy ta'limda zamonaviy o'zgarishtirishlar qilish bo'yicha bir qator amaliy tadbirlar olib borilmoqda. Barcha fanlarni, jumladan, matematikani o'qitishda xorijiy tajribani qiyosiy tahlil qilgan holda yangi pedagogik ta'lim va axborot texnologiyalarini joriy etish bilan birga olib borilmoqda.

O'zbekiston ta'lim milliy dasturi asosan ta'lim sifati va samaradorligini oshirish maqsadida uning mazmunini yangilashga qaratilgan. Ma'lumki, ta'lim mazmunini takomillashtirish uzluksiz ta'limni takomillashtirish, o'rta va oliy ta'lim samaradorligini oshirish, jamiyat uchun har tomonlama barkamol avlodni voyaga etkazishni taqozo etadi. Shuni inobatga olgan holda, universitetda matematikani o'qitish muammolari talabalarning bilimini faollashtirish bilan bog'liq bo'lgan katta tajribani qayta ko'rib chiqishdan iborat.

Tajribadan ma'lumki, talabalar Fok fazosi va unda aniqlangan ayrim operatorlar haqida bilimga ega bo'lish, ularni kelgusida o'zlarining ilmiy ishlarida qo'llashga hamda ularning amaliy ahamiyatini topishga qiziqadilar va ularni chuqurroq o'rganishga harakat qiladilar. Hozirgi asr kompyuter texnikasi asri bo`lganligi sababli masalalarni sonli usullar bilan echish keng rivojlangan, sonli tajribaning roli ham oshgan. O'z navbatida, Fok fazosi va unda aniqlangan ayrim operatorlarni o'rganishga qiziqish ham ortdi.

Bu ikkita masala bilan bog'liq. Birinchidan, individual hodisalarning nisbiy rolini aniqlash uchun fizik hodisaning matematik modelini ishlab chiqish va oson tahlil qilinadigan analitik shaklda echim olish uchun ko'pincha qirqilgan Fok fazosida aniqlangan operatorlarga keltiriladi. Shuning uchun, ko'p hollarda, operatorlarni o'rganishga olib keladigan muammolar paydo bo'ladi. Bundan tashqari, biologiyaning, nazariy va amaliy fizikaning ko'plab muhim masalalarini tushunish uchun ularning muhim ahamiyatini chuqur bilish talab etiladi [1-12]. Shu o'rinda aytish joizki, ko'pgina biologik jarayonlarning matematik modellari oddiy yoki xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi [13-33].

Talabalarga mavzu tushunarli bo'lishi uchun qirqilgan Fok fazosi va unda aniqlangan operatorlar haqida to'liqroq ma'lumot berishga va tushunish oson bo'lishi uchun ularga doir bir qator misollarni echib ko'rsatishga harakat qilinadi.

Hozirgi vaqtda ko'plab professor-o'qituvchilar tomonidan qo'llanilayotgan ilg'or pedagogik texnologiyalar tahlil qilinsa, mavzuni o'tishda aniq sxema ishlab chiqilishi, atamalarni osondan-murakkabga qarab joylashtirilishi har bir ta'rif va teoremalar bo'yicha misollar keltirilishi katta rol o'ynaydi.

Ushbu keltirilganlarni inobatga olib, maqolada mavzuni yoritish bo'yicha alohida sxema, atamalar osondan-murakkabga qarab joylashtirilishi va bir qator tipik misollar echib ko'rsatilishi tavsiya qilinadi. Bu tavsiya qilinayotgan usul matematika ta'lim yo'nalishining 3-4 kurs talabalariga ma'ruza sifatida o'qilgan va talabalar tomonidan ijobiy baholangan. Endi bevosita mavzuni yoritishga harakat qilamiz. Aytish joizki, mavzuning bu tartibda yoritilishi kelgusida shu yo'nalishda ilmiy ish olib boruvchi talabalar uchun tushunish juda qulay hisoblanadi.

$\mathbb{C}$– bir o'lchamli kompleks sonlar fazosi bo'lsin. Ixtiyoriy $n \in N$ natural soni uchun $L_2[a,b]^n$ orqali $[a,b]^n$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$H_0 := \mathrm{C}, H_n := L_2([a,b]^n), n \in N; \quad H^{(m)} := \bigoplus_{n=0}^{m-1} H_n, \quad H := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n.$$

Ta'rif-1. H Hilbert fazoga Fok fazosi deyiladi, $H^{(m)}$ Hilbert fazosiga esa Fok fazosining qirqilgan m – zarrachali qism fazosi deyiladi (Rasulov T.H., Mustafoyeva Z.E. Vektor fazolar. Buxoro, "Durdona", 2018 yil ,77 bet)

Shunday qilib,

$$H^{(1)} := H_0 \oplus H_1 = \{(f_0, f_1) : f_k \in H_k, k = 0,1\};$$

$$H^{(2)} := H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 = \{(f_0, f_1, f_2) : f_k \in H_k, k = 0,1,2\};$$

$$H^{(3)} := H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 = \{(f_0, f_1, f_2, f_3) : f_k \in H_k, k = 0,1,2,3\};$$

…………………………………………………………………..

$$H^{(m)} := H_0 \oplus H_1 \oplus \ldots \oplus H_{m-1} = \{(f_0, f_1, \ldots, f_m) : f_k \in H_k, k = \overline{0, m}\}.$$

Odatda, $L_2[a,b]$ fazo yordamida qurilgan Fok fazosi $F(L_2[a,b])$ kabi belgilanadi.

$m \in N$ - fiksirlangan natural son bo‘lsin. Ixtiyoriy ikkita

$f = (f_0, f_1, \ldots, f_m) \in H^{(m)}$ va $g = (g_0, g_1, \ldots, g_m) \in H^{(m)}$

vektor – funksiyalar uchun ularning skalyar ko‘paytmasi

$$(f, g) = (f_0, g_0)_0 + (f_1, g_1)_1 + \ldots + (f_m, g_m)_m$$

kabi aniqlanadi, bu yerda

$$(f_0, g_0)_0 = f_0 \cdot \overline{g_0}; \quad (f_k, g_k)_k = \int_a^b f_k(t) \cdot \overline{g_k(t)} dt, k = \overline{1, m}.$$

Xuddi shuningdek, $f = (f_0, f_1, \ldots, f_m) \in H^{(m)}$ vektor – funksiyaning normasi

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{m} \|f_k\|_k^2}$$

tenglik yordamida aniqlanadi, bunda

$$\|f_0\|_0 := |f_0|$$

$$\|f_k\|_k := \sqrt{\int_a^b |f_k(t)|^2 dt}, k = \overline{1, m}.$$

Endi H Fok fazosida skalyar ko‘paytma va normani aniqlaymiz. Ixtiyoriy ikkita

$F = (f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots) \in H$ va $G = (g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots) \in H$

elementlar uchun ularning skalyar ko‘paytmasi

$$(F, G) := \sum_{k=0}^{\infty} (f_k, g_k)_k$$

kabi, F vektor – funksiya normasi esa

$$\|F\| := \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_k^2}$$

kabi aniqlanadi.

Ko‘rinib turibdiki, H_0 – bir o‘lchamli chiziqli fazo, ixtiyoriy $n \in N$ natural soni uchun H_n cheksiz o‘lchamli chiziqli fazo bo‘ladi. Demak, $H^{(m)}$ va H chiziqli fazolar cheksiz o‘lchamlidir. Masalan, ixtiyoriy $n \in N$ natural soni uchun

$$f^{(1)} := (0, t, 0, \ldots, 0) \in H^{(m)};$$

$$f^{(2)} := (0, t^2, 0, \ldots, 0) \in H^{(m)};$$

………………………………

$$f^{(n)} := (0, t^n, 0, \ldots, 0) \in H^{(m)}.$$

elementlar chiziqli bog‘lanmagan. Haqiqatdan ham, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sonlari uchun

$$\alpha_1 f^{(1)} + \alpha_2 f^{(2)} + \ldots + \alpha_n f^{(n)} = \theta$$

tenglikni qaraymiz. Mazkur tenglik

$$\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n = 0, \forall t \in [a,b]$$

tenglikka ekvivalentdir.

Oxirgi tenglik ixtiyoriy $t \in [a,b]$ da o‘rinli bo‘lishi uchun

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir. Bu esa o‘z navbatida $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}$ elementlarning chiziqli bog‘lanmagan ekanligini bildiradi. Demak, $\dim H^{(m)} = \infty$ ekan.

Endi bozonli Fok fazo tushunchasini kiritamiz. Ixtiyoriy $n \in N$ natural soni uchun $L_2^{sym}([-a,a]^n)$ orqali $[-a,a]^n$ da aniqlangan, istalgan ikkita argumenti bo‘yicha simmetrik bo‘lgan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz.

$f_2(t_1,t_2) = \cos t_1 + \cos t_2$ funksiya $L_2^{sym}([-a,a]^2)$ ga tegishli elementga $g_2(t_1,t_2) = \cos t_1 - \cos t_2$ funksiya esa $L_2^{sym}([-a,a]^2)$ ga tegishli bo‘lmagan elementga misol bo‘ladi.

Ta`rif-2. Ushbu

$$F_b(L_2^{sym}([-a,a]^n)) := C \oplus L_2[-a,a] \oplus L_2^{sym}([-a,a]^2) \oplus L_2^{sym}([-a,a]^3) \ldots$$

Hilbert fazosiga bozonli Fok fazo deyiladi.

Endi Fok fazosining qirqilgan qism fazosida aniqlangan operatorlari haqida ma’lumotlar keltiramiz.

Dastlab $m = 2$ bo‘lgan holni qaraylik. Ya‘ni $H^{(2)} = H_0 \oplus H_1$ tenglik o‘rinli bo‘lsin, bunda $H_0 := C, H_1 := L_2[a,b]$.

$H^{(2)}$ Hilbert fazodagi quyidagi

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{00} & \mathrm{A}_{01} \\ \mathrm{A}_{01}^* & \mathrm{A}_{11} \end{pmatrix}$$

2×2 operatorli matritsani qaraymiz. Uning matritsaviy elementlari quyidagicha aniqlangan.

Operatorlar ushbu tenglik orqali ta‘sir qiladi.

$$(A_{00} f_0)_0 = \omega_0 f_0;$$

$$(A_{01} f_1)_0 = \int\limits_{L_2[a;b]} v(t) f_1(t) dt;$$

$$(A_{11} f_1)_1(p) = \omega_1(t) f_1(t).$$

Bu yerda ω_0, $v(t)$ va $\omega_1(t)$ funksiyalar $L_2[a,b]$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar.

A_{01}^* operator A_{01} operatorga qo‘shma operator. Bu operatorning aniq ko‘rinishini topamiz.

$$(A_{01} f_1, f_0)_1(t) = \int_{L_2[a;b]} v(t) f_1(t) dt\, \overline{f_0} = \int_{L_2[a;b]} f_1(t)\, \overline{v(t)\, f_0} dt = (f_1, A_{01}^* f_0)$$

Demak,

$$(A_{01}^* f_0)_1(t) = v(t)\, f_0$$

$H^{(3)}$ Hilbert fazosida quyidagi

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

3×3 operatorli matritsani qaraymiz, bu yerda $A_{ij} : H_j \to H_i$, $i, j = 0,1,2.$

Operatorlar ushbu tengliklar orqali ta‘sir qiladi:

$$(A_{00} f_0)_0 = \omega_0 f_0;$$

$$(A_{01} f_1)_0 = \int_{L_2[a;b]} v(t) f_1(t) dt;$$

$$(A_{11} f_1)_1(p) = \omega_1(p) f_1(p);$$

$$(A_{12} f_2)_1(p) = \int_{L_2[a;b]} v_1(s) f_2(p,s) ds;$$

$$(A_{22} f_2)_2(p,q) = \omega_2(p,q) f_2(p,q)$$

Bunda, A_{01}^* operator A_{01} operatorga, A_{12}^* operator A_{12} operatorga qo‘shma operator.

$f_i \in H_i$, $i = 0,1,2.$, ω_0 fiksirlangan haqiqiy son, $\omega_1(\cdot), v_i(\cdot)$, $i = 0,1$ funksiyalar $L_2[a,b]$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar, $\omega_2(\cdot,\cdot)$ esa $L_2[a,b]^2$ da aniqlangan haqiqiy qiymatli simmetrik uzluksiz funksiya.

Parametrlarga qo‘yilgan bunday shartlarda (1) formula bilan $H^{(3)}$ Hilbert fazosida ta‘sir qiluvchi A operator chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi.

$m = 3$ bo‘lgan holda A_{01}^* va A_{12}^* operatorlarning aniq ko‘rinishlarini topamiz. Bu holda Fok fazo uchun operator elementining qo‘shmasini topamiz:

$$(A_{12}^* f_2, f_1) = \iint_{[a;b]} v(t)\, f_2(x,t)\, \overline{f_1(x)}\, dx\, dt = \iint_{[a;b]} f_2(x,t)\ v(t)\ \overline{f_1(x)}\, dx\, dt,$$

$v(t)$ - haqiqiy o‘zgaruvchili funksiya. Haqiqiy sonning qo‘shmasi o‘ziga teng ekanligidan oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin.

$$(A_{12}^* f_2, f_1) = \iint_{L_2[a;b]} f_2(x,t)\ v(t)\ \overline{f_1(x)}\, dx\, dt =$$

$$= \iint_{L_2[a;b]} f_2(x,t)\, \overline{v(t)\, f_1(x)}\, dx\, dt = (f_2, A_{12}^* f_1)$$

Endi bazonli fok fazo (Istalgan ikki argumenti bo‘yicha simmetrik bo‘lgan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi) uchun operator elementining qo‘shmasini ko‘rsatishimiz kerak. Buning uchun operator elementini f_1 skalyar ko‘paytmasini hisoblaymiz.

$$(A_{12} f_2)(x) = \int_{L_2[a;b]} v(t) f_2(x,t) dt$$

$$(A_{12} f_2, f_1)(x) = \iint\limits_{L_2[a;b]} v(t) f_2(x,t) \overline{f_1(x)} dx dt = \iint\limits_{L_2[a;b]} f_2(x,t) v(t) \overline{f_1(x)} dx dt,$$

$v(t)$ - haqiqiy o‘zgaruvchili funksiya ekanligidan foydalanamiz:

$$(A_{12} f_2, f_1)(x,t) = \iint\limits_{L_2[a;b]} f_2(x,t) v(t) \overline{f_1(x)} dx dt = \iint\limits_{L_2[a;b]} f_2(x,t) \overline{v(t) f_1(x)} dx dt$$

t o‘zgaruvchini y o‘zgaruvchiga almashtiramiz:

$$(A_{12} f_2, f_1)(x,y) = \iint\limits_{L_2[a;b]} f_2(x,y) v(y) \overline{f_1(x)} dx dy = \iint\limits_{L_2[a;b]} f_2(x,y) \overline{v(y) f_1(x)} dx dy =$$

$$= \iint\limits_{L_2[a;b]} \frac{f_2(x,y) + f_2(x,y)}{2} \overline{v(y) f_1(x)} dx dy = \iint\limits_{L_2[a;b]} \frac{f_2(x,y)}{2} \overline{v(y) f_1(x)} dx dy +$$

$$+ \iint\limits_{L_2[a;b]} \frac{f_2(y,x)}{2} \overline{v(x) f_1(y)} dx dy == \iint\limits_{L_2[a;b]} f_2(x,y) \overline{\frac{v(y) f_1(x) + v(x) f_1(y)}{2}} dx dy =$$

$$= (f_2, A_{12}^* f_1),$$

$$(A_{12}^* f_1)(x,y) = \frac{v(y) f_1(x) + v(x) f_1(y)}{2}.$$

Ferbion fok fazosi (istalgan ikki argumenti bo‘yicha antisimmetrik bo‘lgan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi) uchun operator elementining qo‘shmasini ko‘rsatishimiz kerak. Buning uchun operator elementini f_1 skalyar ko‘paytmasini hisoblaymiz.

$$(A_{12} f_2, f_1)(x) = \iint\limits_{L_2[a;b]} v(t) f_2(x,t) \overline{f_1(x)} dx dt = \iint\limits_{L_2[a;b]} f_2(x,t) v(t) \overline{f_1(x)} dx dt$$

$v(t)$ - haqiqiy o‘zgaruvchili funksiya ekanligidan foydalanamiz.

$$(A_{12} f_2, f_1)(x,t) = \iint\limits_{L_2[a;b]} f_2(x,t) v(t) \overline{f_1(x)} dx dt = \iint\limits_{L_2[a;b]} f_2(x,t) \overline{v(t) f_1(x)} dx dt$$

t o‘zgaruvchini y o‘zgaruvchiga almashtiramiz

$$(A_{12} f_2, f_1)(x,y) = \iint\limits_{L_2[a;b]} f_2(x,y) v(y) \overline{f_1(x)} dx dy = \iint\limits_{L_2[a;b]} f_2(x,y) \overline{v(y) f_1(x)} dx dy =$$

$$= \iint\limits_{L_2[a;b]} \frac{f_2(x,y) + f_2(x,y)}{2} \overline{v(y) f_1(x)} dx dy = \iint\limits_{L_2[a;b]} \frac{f_2(x,y)}{2} \overline{v(y) f_1(x)} dx dy +$$

$$+ \iint\limits_{L_2[a;b]} \frac{f_2(y,x)}{2} \overline{v(x) f_1(y)} dx dy == \iint\limits_{L_2[a;b]} f_2(x,y) \overline{\frac{v(y) f_1(x) - v(x) f_1(y)}{2}} dx dy =$$

$$= (f_2, A_{12}^* f_1)$$

$$(A_{12}^* f_1)(x,y) = \frac{v(y) f_1(x) - v(x) f_1(y)}{2}.$$

Keltirilgan nazariy ma’lumotlarga oid misollar keltiramiz va echilishini ko‘rsatamiz.

1-misol. $C \oplus L_2[-\pi, \pi]$ fazodagi

$$f^{(1)}=(1,t),\ f^{(2)}=(2,t^2)$$

elementlarni chiziqli bog‘langanlikka tekshiring:

Yechish. $\alpha_1 f^{(1)}+\alpha_2 f^{(2)}=\theta$, $\alpha_1(1,t)+\alpha_2(2,t^2)=(0,0)$,

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=0\\ \alpha_1 t+\alpha_2 t^2=0\end{cases};$$

$\alpha_1 t+\alpha_2 t^2=0$ tenglama $[-\pi,\pi]$ oraliqda cheksiz ko‘p yechimga ega.

Ikkinchi tomondan, algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra, $\alpha_1 t+\alpha_2 t^2=0$ tenglama ko‘pi bilan ikkita kompleks yechimga ega. Bu ziddiyatdan $\alpha_1 t+\alpha_2 t^2=0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $f^{(1)}, f^{(2)}$ elementlar chiziqli bog‘lanmagan ekan.

2-misol.

$$f=(2,\sin t_1,\cos t_1+\cos t_2)\in C\oplus L_2[-\pi,\pi]\oplus L_2([-\pi,\pi]^2);$$

$$g=(3+i,\cos t_1,\cos t_1-\cos t_2)\in C\oplus L_2[-\pi,\pi]\oplus L_2([-\pi,\pi]^2)$$

elementlarning skalyar ko‘paytmasini va normasini toping:

Yechish. f va g larning skalyar ko‘paytmasi quyidagicha topiamiz:

$$(f,g)=2\cdot\overline{(3+i)}+\int_{-\pi}^{\pi}\cos t_1\cdot\sin t_1 dt_1+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t_1+\cos t_2)(\cos t_1-\cos t_2)dt_1dt_2=$$

$$=2\cdot(3-i)+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2t_1 dt_1+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^2 t_1-\cos^2 t_2)dt_1dt_2=6-2i;$$

Endi normasini ta`rif bo‘yicha hisoblaymiz:

$$\|f\|^2=2^2+\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t_1dt_1+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t_1+\cos t_2)^2dt_1dt_2=4+\pi+2\pi^2$$

$$\|g\|^2=|3+i|^2+\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t_1dt_1+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos t_1-\cos t_2)^2dt_1dt_2=10+\pi+2\pi^2.$$

3-misol. $C\oplus L_2[-\pi,\pi]$ fazodagi $f^{(1)}=(1,\cos 2t)$, $f^{(2)}=(2,\cos^2 t)$, $f^{(3)}=(6,2)$ elementlarni chiziqli bog‘langanlikka tekshiring:

Yechish. Trigonometriyadan ma`lum bo‘lgan $\cos 2t=2\cos^2 t-1$ formuladan foydalanamiz:

$$f^{(1)}-2f^{(2)}+\frac{1}{2}f^{(3)}=(1,\cos 2t)+(-4,-2\cos^2 t)+(3,1)=$$

$$=(1-4+3,\cos 2t-2\cos^2 t+1)=(0,0)=\theta$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Demak, $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ elementlar chiziqli bog‘langan ekan.

Yuqorida keltirilganlardan shuni xulosa qilish mumkinki, Ferbion fok fazosi (istalgan ikki argumenti bo‘yicha antisimmetrik bo‘lgan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi) ning amaliy ahamiyati juda katta. Amaliy ahamiyati sifatida biologik va fizik jarayonlarni matematik modellashtirish hamda ularni tahlil qilishda keng qo‘llanilishini aytish mumkin. Bundan tashqari, qayd qilingan fazolarda xususiy hosilali differensial tenglamalar bo‘yicha [34-45] ilmiy izlanishlarni misol sifatida keltirishimiz mumkin.

Aytish joizki, vektor, chiziqli, Banax, Ferbion fok fazosi, Gil'bert fazolarida qo‘llaniladigan tengsizliklarni amaliy masalalarda qo‘llash usullari hamda funksiyalarning chiziqli erkli ekanligi va elementlarning skalyar ko‘paytmasi va normalari topib ko‘rsatilgan. SHu bilan bir qatorda, fazolar bo‘yicha mavzularni o‘qitishda ilg‘or pedagogik texnologiyalardan foydalanish usullari tavsiya qilingan.

REFERENCES

1. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
2. Rasulov X.R. Qualitative analysis of strictly non-Volterra quadratic dynamical systems with continuous time // arXiv e-prints, 2022, arXiv: 2211.06186.
3. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
4. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
5. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.
6. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.
7. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с не-прерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.
8. Расулов Х.Р., Ф.М. Джуракулова (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress. 2:1, 455-462 бетлар.
9. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.
10. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.
11. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.
12. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.
13. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.

14. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
15. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
16. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
17. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
18. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
19. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
20. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.
21. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
22. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.
23. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, 4, с.3-7.
24. Расулов Х.Р., Рашидов А. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
25. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века. 53:6-1, 2019. С.16-18.
26. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta'lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g'oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.
27. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.
28. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. (2022) Ikkita buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptic tenglama uchun chegaraviy masala haqida // Central Asian Academic Journal Of Scientific Research, 2(5), 544-557 b.

29. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig’iga ega bo’lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo’yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
30. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
31. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
32. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
33. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz).
34. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz).
35. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
36. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
37. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
38. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
39. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
40. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
41. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
42. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig’iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
43. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).
44. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
45. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).