ГЕНЕТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА В СИМПЛЕКСЕ S^2

Муминов У.Р.
Докторант ФерГУ

https://doi.org/10.5281/zenodo.7336396

Аннотация. *Представлены условия ассоциативности и альтернированности генетической алгебры в двумерном симплексе.*

Ключевые слова: *Генетическая алгебра, симплекс, биологическая система.*

GENETIC ALGEBRA AND SIMPLEX S^2

Annotation. *Conditions for associativity and alternation of genetic algebra in a two-dimensional simplex are presented.*

Keywords: *Genetic algebra, simplex, biological system.*

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, $S^{m-1}=\left\{x=(x_1,\dots,x_m):\sum_{i=1}^{m}x_i=1, x_i\ge 0\right\}\subset R^m$ симплекс означает некую биологическую систему.

Пусть набор чисел $\{P_{ij,k}\}, i,j,k=\overline{1,m}$ удовлетворяют условиям

$$P_{ij,k}=P_{ji,k}\ge 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{m}x_i=1. \tag{1}$$

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Тогда эволюционный оператор $V:S^{m-1}\to S^{m-1}$ определяет закон эволюции системы по формулам

$$x_k^{'}=\sum_{i,j=1}^{m}P_{ij,k}x_ix_j, k=\overline{1,m}, \tag{2}$$

где $V(x)=\left(x_1^{'},\dots,x_m^{'}\right)$, т.е., если $x=(x_1,\dots,x_m)$ данное состояние системы, то $V(x)=\left(x_1^{'},\dots,x_m^{'}\right)$ следующее состояние системы. Очевидно, равенство

$$x\circ y=\frac{1}{4}\left(V(x+y)-V(x-y)\right) \tag{3}$$

или

$$x\circ y=\left(\sum_{i,j=1}^{m}p_{ij,1}x_iy_j;\ \sum_{i,j=1}^{m}p_{ij,2}x_iy_j;\dots\sum_{i,j=1}^{m}p_{ij,m}x_iy_j\right). \tag{4}$$

определяет закон умножения.

Определение1. R^m, с введенной в нем операцией умножения определенной равенством (3) или (4) при помощи структурных коэффициентов $\{P_{ij,k}\}$ называется генетической алгеброй.

Следовательно, получаем генетическую алгебру. Очевидно, генетические алгебры в силу симметрии $P_{ij,k}=P_{ji,k}, k=\overline{1,m}$ являются коммутативным. Представляет интерес нахождения условий при которых генетическая алгебра является ассоциативной, альтернативной и т.д.

Определение2. Следующее выражение

$$A(x,y,z)=(x\circ y)\circ z-x\circ(y\circ z) \tag{5}$$

называется ассоциатором элементов $x,y,z\in A(x,y,z)$.

Определение3. Алгебра $(R^n,\circ)$ называется ассоциативной алгеброй, если для любого $x,y,z\in(R^n,\circ)$

$$A(x,y,z)=0 \tag{6}$$

выполняется равенство.

Определение4. $(R^n,\circ)$-алгебра называется альтернативной алгеброй, если для любых $x,y\in(R^n,\circ)$

$$A(x,x,y)=0 \text{ или } A(y,x,x)=0 \tag{7}$$

выполняется одно из равенств.

Определение5. $(R^n,\circ)$-алгебра называется йордановной алгеброй, если для любых $x,y\in(R^n,\circ)$

$$A(x^2,y,x)=0 \tag{8}$$

выполняется одно из равенств.

Мы знаем, что S^2 симплексный треугольник, вершины которого лежат в точках $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$. Обозначим множество элементов $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$, образующих базис в S^2, через E. Рассмотрим множество $E=\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$, состоящее из симплексных вершин. Мы знаем, что $E\subset S^2$ будет. Эта система $\langle E,\circ\rangle$ образует алгебру.

Как правило, любая алгебра, определяемая умножением (3) или (4), коммутативна. Но не всегда образует ассоциативные, альтернативные и йордановские алгебры. Ниже мы рассмотрим $\langle E,\circ\rangle$-алгебру.

Теорема1. Генетическая алгебра $\langle E,\circ\rangle$ является ассоциативной алгеброй тогда и только тогда, когда

$$1)\ \left\{P_{11,1}=\frac{P_{12,1}P_{13,1}+P_{12,2}P_{23,1}-P_{12,1}P_{23,2}-P_{13,1}P_{23,3}}{P_{23,1}},\ P_{11,2}=\frac{P_{12,1}P_{13,2}-P_{13,2}P_{23,3}}{P_{23,1}},\right.$$

$$\left.P_{11,3}=\frac{P_{12,1}P_{13,3}+P_{12,2}P_{23,3}-P_{13,3}P_{23,3}}{P_{23,1}},\ P_{12,3}=0\right\},$$

2) $\{P_{12,1} = P_{12,3} = P_{23,1} = P_{23,3} = 0\}$,

3) $\left\{P_{12,3} = P_{13,2} = P_{23,1} = 0,\ P_{13,3} = \dfrac{P_{12,2}P_{23,3}}{P_{23,3} - P_{12,1}},\ P_{23,2} = \dfrac{P_{12,1}P_{13,1} - P_{13,1}P_{23,3}}{P_{12,1}}\right\}$,

4) $\{P_{12,2} = P_{12,3} = P_{23,1} = P_{23,2} = 0,\ P_{23,3} = P_{12,1}\}$,

5) $\{P_{12,1} = P_{12,3} = P_{23,1} = P_{13,1} = P_{13,2} = 0,\ P_{13,3} = P_{12,2}\}$,

6) $\left\{P_{12,2} = P_{12,3} = P_{13,3} = P_{13,2} = P_{23,1} = 0,\ P_{23,2} = \dfrac{P_{12,1}P_{13,1} - P_{13,1}P_{23,3}}{P_{12,1}}\right\}$.

Доказательство. Сначала мы вычисляем произведения $(e_1 \circ e_2)$ и $(e_2 \circ e_3)$:

$$e_1 \circ e_2 = [P_{11,1} \cdot 1 \cdot 0 + P_{22,1} \cdot 0 \cdot 1 + P_{33,1} \cdot 0 \cdot 0 + P_{12,1}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0) + P_{13,1}(1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) + P_{23,1}(0 \cdot 0 + 0 \cdot 1);$$
$$P_{11,2} \cdot 1 \cdot 0 + P_{22,2} \cdot 0 \cdot 1 + P_{33,3} \cdot 0 \cdot 0 + P_{12,2}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0) + P_{13,2}(1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) + P_{23,2}(0 \cdot 0 + 0 \cdot 1);$$

$$P_{11,3} \cdot 1 \cdot 0 + P_{22,3} \cdot 0 \cdot 1 + P_{33,3} \cdot 0 \cdot 0 + P_{12,3}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0) + P_{13,3}(1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) +$$
$$+P_{23,3}(0 \cdot 0 + 0 \cdot 1)] = (P_{12,1}, P_{12,2}, P_{12,3}),$$
$$e_2 \circ e_3 = [P_{11,1} \cdot 0 \cdot 0 + P_{22,1} \cdot 1 \cdot 0 + P_{33,1} \cdot 0 \cdot 1 + P_{12,1}(0 \cdot 0 + 1 \cdot 0) + P_{13,1}(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) + P_{23,1}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0);$$
$$P_{11,2} \cdot 0 \cdot 0 + P_{22,2} \cdot 1 \cdot 0 + P_{33,2} \cdot 0 \cdot 1 + P_{12,2}(0 \cdot 0 + 1 \cdot 0) + P_{13,2}(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) +$$
$$+P_{23,2}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0);\ P_{11,3} \cdot 0 \cdot 0 + P_{22,3} \cdot 1 \cdot 0 + P_{33,3} \cdot 0 \cdot 1 + P_{12,3}(0 \cdot 0 + 1 \cdot 0) +$$
$$+ P_{13,3}(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) + P_{23,3}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0)] = (P_{23,1}, P_{23,2}, P_{23,3}).$$

Используя эти произведения, мы вычисляем произведения $(e_1 \circ e_2) \circ e_3$ и $e_1 \circ (e_2 \circ e_3)$:

$$(e_1 \circ e_2) \circ e_3 = (P_{33,1}P_{12,3} + P_{13,1}P_{12,1} + P_{23,1}P_{12,2};\ P_{33,2}P_{12,3} + P_{13,2}P_{12,1} + P_{23,2}P_{12,2};\ P_{33,3}P_{12,3} +$$
$$+P_{13,3}P_{12,1} + P_{23,3}P_{12,2}),$$
$$e_1 \circ (e_2 \circ e_3) = (P_{11,1}P_{23,1} + P_{12,1}P_{23,2} + P_{13,1}P_{23,3};\ P_{11,2}P_{23,1} + P_{12,2}P_{23,2} + P_{13,2}P_{23,3};\ P_{11,3}P_{23,1} +$$
$$+P_{12,3}P_{23,2} + P_{13,3}P_{23,3}).$$

Вычисляем ассоциатором элементом:

$$A(e_1, e_2, e_3) = (e_1 \circ e_2) \circ e_3 - e_1 \circ (e_2 \circ e_3) = (P_{33,1}P_{12,3} + P_{13,1}P_{12,1} + P_{23,1}P_{12,2} - P_{11,1}P_{23,1} - P_{12,1}P_{23,2} - P_{13,1}P_{23,3};$$
$$P_{33,2}P_{12,3} + P_{13,2}P_{12,1} + P_{23,2}P_{12,2} - P_{11,2}P_{23,1} - P_{12,2}P_{23,2} - P_{13,2}P_{23,3};$$
$$P_{33,3}P_{12,3} + P_{13,3}P_{12,1} + P_{23,3}P_{12,2} - P_{11,3}P_{23,1} - P_{12,3}P_{23,2} - P_{13,3}P_{23,3}).$$

Следующие

$$\begin{cases} P_{33,1}P_{12,3}+P_{13,1}P_{12,1}+P_{23,1}P_{12,2}-P_{11,1}P_{23,1}-P_{12,1}P_{23,2}-P_{13,1}P_{23,3}=0, \\ P_{33,2}P_{12,3}+P_{13,2}P_{12,1}+P_{23,2}P_{12,2}-P_{11,2}P_{23,1}-P_{12,2}P_{23,2}-P_{13,2}P_{23,3}=0, \\ P_{33,3}P_{12,3}+P_{13,3}P_{12,1}+P_{23,3}P_{12,2}-P_{11,3}P_{23,1}-P_{12,3}P_{23,2}-P_{13,3}P_{23,3}=0 \end{cases}$$

когда система уравнений имеет решение, ассоциативный элемент равен нулю. Решая эту систему, получаем следующие решения:

1) $\left\{P_{11,1}=\dfrac{P_{12,1}P_{13,1}+P_{12,2}P_{23,1}-P_{12,1}P_{23,2}-P_{13,1}P_{23,3}}{P_{23,1}},\ P_{11,2}=\dfrac{P_{12,1}P_{13,2}-P_{13,2}P_{23,3}}{P_{23,1}},\right.$

$\left. P_{11,3}=\dfrac{P_{12,1}P_{13,3}+P_{12,2}P_{23,3}-P_{13,3}P_{23,3}}{P_{23,1}},P_{12,3}=0\right\},$

2) $\{P_{12,1}=P_{12,3}=P_{23,1}=P_{23,3}=0\},$

3) $\left\{P_{12,3}=P_{13,2}=P_{23,1}=0,\ P_{13,3}=\dfrac{P_{12,2}P_{23,3}}{P_{23,3}-P_{12,1}},\ P_{23,2}=\dfrac{P_{12,1}P_{13,1}-P_{13,1}P_{23,3}}{P_{12,1}}\right\},$

4) $\{P_{12,2}=P_{12,3}=P_{23,1}=P_{23,2}=0,\ P_{23,3}=P_{12,1}\},$

5) $\{P_{12,1}=P_{12,3}=P_{23,1}=P_{13,1}=P_{13,2}=0,\ P_{13,3}=P_{12,2}\},$

6) $\left\{P_{12,2}=P_{12,3}=P_{13,3}=P_{13,2}=P_{23,1}=0,\ P_{23,2}=\dfrac{P_{12,1}P_{13,1}-P_{13,1}P_{23,3}}{P_{12,1}}\right\}.$

Если одно из этих условий выполнено, алгебра $\langle E,\circ\rangle$ является ассоциативной алгеброй.

Теорема2. Генетическая алгебра $\langle E,\circ\rangle$ является альтернативной алгеброй тогда и только тогда, когда

1) $\left\{P_{23,1}=\dfrac{P_{12,1}P_{12,2}+P_{12,3}P_{13,1}}{P_{11,3}},\ P_{11,2}=0,P_{23,2}=\dfrac{P_{12,2}^2-P_{11,1}P_{12,2}+P_{12,3}P_{13,2}}{P_{11,3}},\right.$

$\left. P_{23,3}=\dfrac{P_{11,3}P_{12,1}-P_{11,1}P_{12,3}+P_{12,2}P_{12,3}+P_{12,3}P_{13,3}}{P_{11,3}}\right\},$

2) $\{P_{11,2}=0,P_{12,1}=1,\ P_{12,2}=0,P_{11,1}+P_{11,2}=1\},$

3) $\left\{P_{11,1}=1,\ P_{11,2}=0,P_{13,1}=-\dfrac{P_{12,1}P_{12,2}}{P_{12,3}},\ P_{13,2}=\dfrac{P_{12,2}-P_{12,2}^2}{P_{12,3}},\ P_{13,1}+P_{13,2}=P_{12,2}\right\},$

4) $\{P_{11,1}=P_{12,2}=1,P_{11,2}=0,P_{12,1}=0\}.$

Доказательство. Сначала мы вычисляем произведения $(e_1\circ e_1)$ и $(e_1\circ e_2)$:

$e_1\circ e_1=[P_{11,1}\cdot 1\cdot 1+P_{22,1}\cdot 0\cdot 0+P_{33,1}\cdot 0\cdot 0+P_{12,1}(1\cdot 0+0\cdot 1)+P_{13,1}(1\cdot 0+0\cdot 1)+P_{23,1}(0\cdot 0+0\cdot 0);$

$$P_{11,2}\cdot 1\cdot 1+P_{22,2}\cdot 0\cdot 0+P_{33,3}\cdot 0\cdot 0+P_{12,2}(1\cdot 0+0\cdot 1)+P_{13,2}(1\cdot 0+0\cdot 1)+P_{23,2}(0\cdot 0+0\cdot 0);$$

$$P_{11,3}\cdot 1\cdot 1+P_{22,3}\cdot 0\cdot 0+P_{33,3}\cdot 0\cdot 0+P_{12,3}(1\cdot 0+0\cdot 1)+P_{13,3}(1\cdot 0+0\cdot 1)+$$
$$+P_{23,3}(0\cdot 0+0\cdot 0)\big]=(P_{11,1},P_{11,2},P_{11,3}),$$
$$e_1\circ e_2=\big[P_{11,1}\cdot 1\cdot 0+P_{22,1}\cdot 0\cdot 1+P_{33,1}\cdot 0\cdot 0+P_{12,1}(1\cdot 1+0\cdot 0)+P_{13,1}(1\cdot 0+0\cdot 1)+P_{23,1}(0\cdot 0+0\cdot 1);$$
$$P_{11,2}\cdot 1\cdot 0+P_{22,2}\cdot 0\cdot 1+P_{33,3}\cdot 0\cdot 0+P_{12,2}(1\cdot 1+0\cdot 0)+P_{13,2}(1\cdot 0+0\cdot 1)+P_{23,2}(0\cdot 0+0\cdot 1);$$

$$P_{11,3}\cdot 1\cdot 0+P_{22,3}\cdot 0\cdot 1+P_{33,3}\cdot 0\cdot 0+P_{12,3}(1\cdot 1+0\cdot 0)+P_{13,3}(1\cdot 0+0\cdot 1)+$$
$$+P_{23,3}(0\cdot 0+0\cdot 1)\big]=(P_{12,1},P_{12,2},P_{12,3}).$$

Используя эти произведения, мы вычисляем произведения $(e_1\circ e_1)\circ e_2$ и $e_1\circ(e_1\circ e_2)$:

$$(e_1\circ e_1)\circ e_2=\big(P_{22,1}P_{11,2}+P_{12,1}P_{11,1}+P_{23,1}P_{11,3};\ P_{22,2}P_{11,2}+P_{12,2}P_{11,1}+P_{23,2}P_{11,3};$$
$$P_{22,3}P_{11,2}+P_{12,3}P_{11,1}+P_{23,3}P_{11,3}\big),$$
$$e_1\circ(e_1\circ e_2)=\big(P_{11,1}P_{12,1}+P_{12,1}P_{12,2}+P_{13,1}P_{12,3};\ \ P_{11,2}P_{12,1}+P_{12,2}^2+P_{13,2}P_{12,3};$$
$$P_{11,3}P_{12,1}+P_{12,3}P_{12,2}+P_{13,3}P_{12,3}\big).$$

Вычисляем ассоциатором элементом:

$$A(e_1,e_1,e_2)=(e_1\circ e_1)\circ e_2-e_1\circ(e_1\circ e_2)=\big(P_{22,1}P_{11,2}+P_{23,1}P_{11,3}-P_{12,1}P_{12,2}-P_{13,1}P_{12,3};$$
$$P_{22,2}P_{11,2}+P_{12,2}P_{11,1}+P_{23,2}P_{11,3}-P_{11,2}P_{12,1}-P_{12,2}^2-P_{13,2}P_{12,3};$$
$$P_{22,3}P_{11,2}+P_{12,3}P_{11,1}+P_{23,3}P_{11,3}-P_{11,3}P_{12,1}-P_{12,3}P_{12,2}-P_{13,3}P_{12,3}\big).$$

Следующие

$$\begin{cases} P_{22,1}P_{11,2}+P_{23,1}P_{11,3}-P_{12,1}P_{12,2}-P_{13,1}P_{12,3}=0,\\ P_{22,2}P_{11,2}+P_{12,2}P_{11,1}+P_{23,2}P_{11,3}-P_{11,2}P_{12,1}-P_{12,2}^2-P_{13,2}P_{12,3}=0,\\ P_{22,3}P_{11,2}+P_{12,3}P_{11,1}+P_{23,3}P_{11,3}-P_{11,3}P_{12,1}-P_{12,3}P_{12,2}-P_{13,3}P_{12,3}=0\end{cases}$$

когда система уравнений имеет решение, ассоциативный элемент равен нулю. Решив эту систему, получим следующее решение:

$$1)\ \Big\{P_{23,1}=\frac{P_{12,1}P_{12,2}+P_{12,3}P_{13,1}}{P_{11,3}},\ P_{11,2}=0, P_{23,2}=\frac{P_{12,2}^2-P_{11,1}P_{12,2}+P_{12,3}P_{13,2}}{P_{11,3}},$$
$$P_{23,3}=\frac{P_{11,3}P_{12,1}-P_{11,1}P_{12,3}+P_{12,2}P_{12,3}+P_{12,3}P_{13,3}}{P_{11,3}}\Big\},$$

$$2)\ \{P_{11,2}=0, P_{12,1}=1,\ P_{12,2}=0, P_{11,1}+P_{11,2}=1\},$$

3) $\left\{P_{11,1}=1,\ P_{11,2}=0, P_{13,1}=-\dfrac{P_{12,1}P_{12,2}}{P_{12,3}},\ P_{13,2}=\dfrac{P_{12,2}-P_{12,2}^{2}}{P_{12,3}},\ P_{13,1}+P_{13,2}=P_{12,2}\right\}$,

4) $\left\{P_{11,1}=P_{12,2}=1, P_{11,2}=0, P_{12,1}=0\right\}$

При выполнении этого условия алгебра $\langle E,\circ\rangle$ является альтернативной алгеброй.

Теорема3. Генетическая алгебра $\langle E,\circ\rangle$ является йордановной алгеброй тогда и только тогда, когда

1) $\left\{P_{11,2}=0, P_{11,3}=0\right\}$,

2) $\left\{P_{12,1}=0, P_{22,1}=-\dfrac{P_{11,3}P_{23,1}}{P_{11,2}}, P_{12,3}=0, P_{22,3}=-\dfrac{P_{11,3}P_{23,3}}{P_{11,2}}\right\}$,

3) $\left\{P_{12,1}=0,\ P_{23,1}=0,\ P_{11,2}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{23,3}=0\right\}$,

4) $\left\{P_{12,1}=0,\ P_{22,1}=0,\ P_{11,3}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{22,3}=0\right\}$,

5) $\left\{P_{11,1}=\dfrac{P_{11,3}P_{23,1}^{2}-P_{12,1}^{2}P_{23,2}}{P_{12,1}P_{23,1}},\ P_{11,2}=0,\ P_{12,2}=\dfrac{P_{11,3}P_{23,1}}{P_{12,1}},\ P_{12,3}=0,\ P_{23,3}=P_{12,1}\right\}$,

6) $\left\{P_{22,1}=\dfrac{P_{12,1}P_{12,2}}{P_{11,2}},\ P_{22,2}=\dfrac{P_{11,2}P_{12,1}-P_{11,1}P_{12,2}+P_{12,2}^{2}}{P_{11,2}},\ P_{11,3}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{22,3}=0\right\}$,

7) $\left\{P_{23,1}=0,\ P_{11,2}=0,\ P_{13,2}=0, P_{23,2}=\dfrac{P_{12,1}P_{13,1}-P_{13,1}P_{23,3}}{P_{12,1}}, P_{12,3}=0, P_{13,3}=\dfrac{P_{12,2}P_{23,3}}{-P_{12,1}+P_{23,3}}\right\}$,

8) $\left\{P_{23,1}=0,\ P_{11,2}=0,\ P_{12,2}=0,\ P_{23,2}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{23,3}=P_{12,1}\right\}$,

9) $\left\{P_{11,1}=1,\ P_{12,1}=0,\ P_{13,1}=0,\ P_{13,2}=0,\ P_{11,2}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{12,2}=1\right\}$,

10) $\left\{P_{12,1}=0,\ P_{13,1}=0,\ P_{22,1}=-\dfrac{P_{11,3}P_{23,1}}{P_{11,2}},\ P_{13,2}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{13,3}=P_{12,2}\right\}$,

11) $\left\{P_{12,1}=0,\ P_{13,1}=0,\ P_{23,1}=0,\ P_{11,2}=0,\ P_{13,2}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{13,3}=P_{12,2}\right\}$,

12) $\left\{P_{23,1}=\dfrac{P_{12,1}P_{23,3}}{P_{12,3}},\ P_{22,1}=0,\ P_{23,2}=-\dfrac{P_{12,1}P_{12,2}}{P_{12,3}},\ P_{22,2}=P_{12,1}+P_{23,3},\ P_{11,3}=0,\ P_{22,3}=0\right\}$,

13) $\left\{P_{13,1}=0,\ P_{23,1}=0,\ P_{11,2}=0,\ P_{13,2}=0,\ P_{23,2}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{13,3}=1,\ P_{12,1}+P_{12,2}=1\right\}$,

14) $\left\{P_{12,1}=0,\ P_{23,1}=0,\ P_{22,1}=0,\ P_{23,2}=0,\ P_{22,2}=P_{23,3},\ P_{11,3}=0,\ P_{22,3}=0\right\}$,

15) $\left\{P_{12,1}=0,\ P_{13,1}=0,\ P_{22,1}=0,\ P_{13,2}=0,\ P_{11,3}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{13,3}=P_{12,2}\right\}$,

$$16)\left\{P_{23,1}=0,\ P_{22,1}=0,\ P_{23,2}=-\frac{P_{12,1}P_{12,2}}{P_{12,3}},\ P_{22,2}=P_{12,1},\ P_{11,3}=0,\ P_{23,3}=0,\ P_{22,3}=0\right\},$$

$$17)\left\{P_{12,1}=0,\ P_{13,1}=\frac{P_{12,3}P_{23,1}}{P_{22,3}},\ P_{22,1}=0,\ P_{23,2}=\frac{P_{13,2}P_{22,3}}{P_{12,3}},\right.$$

$$\left.P_{22,2}=\frac{P_{12,2}P_{22,3}-P_{13,3}P_{22,3}+P_{12,3}P_{23,3}}{P_{12,3}},\ P_{11,3}=0\right\},$$

$$18)\left\{P_{12,1}=0,\ P_{22,1}=-\frac{P_{11,3}P_{23,1}}{P_{11,2}},\ P_{12,3}=0,\ P_{22,3}=-\frac{P_{11,3}P_{23,3}}{P_{11,2}}\right\},$$

$$19)\left\{P_{22,1}=\frac{P_{12,1}P_{12,2}-P_{11,3}P_{23,1}}{P_{11,2}},\ P_{22,2}=\frac{P_{11,2}P_{12,1}-P_{11,1}P_{12,2}+P_{12,2}^{2}-P_{11,3}P_{23,2}}{P_{11,2}},\right.$$

$$\left.P_{12,3}=0,\ P_{22,3}=\frac{P_{11,3}P_{12,1}-P_{11,3}P_{23,3}}{P_{11,2}}\right\},$$

$$20)\left\{P_{11,1}=\frac{P_{12,1}P_{13,1}+P_{12,2}P_{23,1}-P_{12,1}P_{23,2}-P_{13,1}P_{23,3}}{P_{23,1}},\ P_{11,2}=0,\ P_{13,2}=0,\right.$$

$$\left.P_{12,3}=0,\ P_{13,3}=\frac{-P_{11,3}P_{23,1}+P_{12,2}P_{23,3}}{-P_{12,1}+P_{23,3}}\right\},$$

$$22)\left\{P_{13,2}=\frac{P_{12,1}P_{12,2}-P_{11,2}P_{22,1}}{P_{22,3}},\ P_{22,2}=\frac{P_{12,1}^{2}-P_{11,1}P_{22,1}+P_{12,2}P_{22,1}-P_{13,1}P_{22,3}}{P_{12,1}},\right.$$

$$\left.P_{11,3}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{13,3}=P_{12,2}\right\},$$

$$23)\left\{P_{22,1}=0,\ P_{23,2}=\frac{-P_{12,1}P_{12,2}+P_{13,2}P_{22,3}}{P_{12,3}},\ P_{22,2}=\frac{P_{12,1}^{2}-P_{13,1}P_{22,3}+P_{12,3}P_{23,1}}{P_{12,1}},\ P_{11,3}=0,\right.$$

$$\left.P_{13,3}=\frac{P_{12,1}P_{12,2}P_{22,3}+P_{12,3}P_{13,1}P_{22,3}-P_{12,3}^{2}P_{23,1}+P_{12,1}P_{12,3}P_{23,3}}{P_{12,1}P_{22,3}}\right\},$$

$$24)\left\{P_{11,1}=\frac{P_{11,2}P_{22,1}-P_{11,2}P_{13,1}P_{22,3}+P_{11,3}P_{23,1}-P_{11,3}P_{13,1}P_{23,3}}{P_{11,2}P_{22,1}+P_{11,3}P_{23,1}},\ P_{12,1}=0,\ P_{12,3}=0,\right.$$

$$\left.P_{13,2}=\frac{-P_{11,2}^{2}P_{22,1}-P_{11,2}P_{11,3}P_{23,1}}{P_{11,2}P_{22,3}+P_{11,3}P_{23,3}},\ P_{13,3}=\frac{-P_{11,2}P_{11,3}P_{22,1}+P_{11,2}P_{22,3}-P_{11,3}^{2}P_{23,1}+P_{11,3}P_{23,3}}{P_{11,2}P_{22,3}+P_{11,3}P_{23,3}}\right\}.$$

Доказательство. В процессе доказательства предыдущей теоремы мы вычислили произведения $(e_1\circ e_1)$, $(e_1\circ e_2)$ и $(e_1\circ e_1)\circ e_2$. Используя эти произведения, мы вычисляем произведения $\left(\left(e_1 \circ e_1\right) \circ e_2\right) \circ e_1$ и $\left(e_1 \circ e_1\right) \circ \left(e_1 \circ e_2\right)$. Для этого обозначим элементы произведения $\left(e_1 \circ e_1\right) \circ e_2$ через b_1, b_2 и b_3:

$$\left(e_1 \circ e_1\right) \circ e_2 = (P_{11,2}P_{22,1} + P_{11,1}P_{12,1} + P_{11,3}P_{23,1};\ P_{11,2}P_{22,2} + P_{11,1}P_{12,2} + P_{11,3}P_{23,2};\ P_{11,2}P_{22,3} + P_{11,1}P_{12,3} + P_{11,3}P_{23,3}) = (b_1; b_2; b_3).$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

С помощью этого умножения вычисляем умножение $\left(\left(e_1 \circ e_1\right) \circ e_2\right) \circ e_1$ и обозначаем его элементы через g_1, g_2 и g_3:

$$\left(\left(e_1 \circ e_1\right) \circ e_2\right) \circ e_1 = (P_{11,1}b_1 + P_{12,1}b_2 + P_{13,1}b_3; P_{11,2}b_1 + P_{12,2}b_2 + P_{13,2}b_3; P_{11,3}b_1 + P_{12,3}b_2 + P_{13,3}b_3) = (P_{11,1}P_{11,2}P_{22,1} + P_{11,1}P_{11,1}P_{12,1} + P_{11,1}P_{11,3}P_{23,1} + P_{11,2}P_{12,1}P_{22,2} + P_{11,1}P_{12,1}P_{12,2} + P_{11,3}P_{12,1}P_{23,2} + P_{11,2}P_{13,1}P_{22,3} + P_{11,1}P_{13,1}P_{12,3} + P_{11,3}P_{13,1}P_{23,3};\ P_{11,2}P_{11,2}P_{22,1} + P_{11,1}P_{11,2}P_{12,1} + P_{11,2}P_{11,3}P_{23,1} + P_{11,2}P_{12,2}P_{22,2} + P_{11,1}P_{12,2}P_{12,2} + P_{11,3}P_{12,2}P_{23,2} + P_{11,2}P_{13,2}P_{22,3} + P_{11,1}P_{12,3}P_{13,2} + P_{11,3}P_{13,2}P_{23,3};\ P_{11,2}P_{11,3}P_{22,1} + P_{11,1}P_{11,3}P_{12,1} + P_{11,3}P_{11,3}P_{23,1} + P_{11,2}P_{12,3}P_{22,2} + P_{11,1}P_{12,3}P_{12,2} + P_{11,3}P_{12,3}P_{23,2} + P_{11,2}P_{13,3}P_{22,3} + P_{11,1}P_{12,3}P_{13,3} + P_{11,3}P_{13,3}P_{23,3}) = \left(g_1, g_2, g_3\right).$$

ОБСУЖДЕНИЕ

Обозначим элементы умножения $\left(e_1 \circ e_1\right) \circ \left(e_1 \circ e_2\right)$ на d_1, d_2 и d_3:

$$\left(e_1 \circ e_1\right) \circ \left(e_1 \circ e_2\right) = (P_{11,1}P_{11,1}P_{12,1} + P_{11,2}P_{12,2}P_{22,1} + P_{11,3}P_{12,3}P_{33,1} + P_{11,1}P_{12,1}P_{12,2} + P_{11,2}P_{12,1}P_{12,1} + P_{11,1}P_{12,3}P_{13,1} + P_{11,3}P_{12,1}P_{13,1} + P_{11,2}P_{12,3}P_{23,1} + P_{11,3}P_{12,2}P_{23,1};$$

$$P_{11,1}P_{11,2}P_{12,1} + P_{11,2}P_{12,2}P_{22,2} + P_{11,3}P_{12,3}P_{33,2} + P_{11,1}P_{12,2}P_{12,2} + P_{11,2}P_{12,1}P_{12,2} + P_{11,1}P_{12,3}P_{13,2} + P_{11,3}P_{12,1}P_{13,2} + P_{11,2}P_{12,3}P_{23,2} + P_{11,3}P_{12,2}P_{23,2};$$

$$P_{11,1}P_{11,3}P_{12,1} + P_{11,2}P_{12,2}P_{22,3} + P_{11,3}P_{12,3}P_{33,3} + P_{11,1}P_{12,2}P_{12,3} + P_{11,2}P_{12,1}P_{12,3} + P_{11,1}P_{12,3}P_{13,3} + P_{11,3}P_{12,1}P_{13,3} + P_{11,2}P_{12,3}P_{23,3} + P_{11,3}P_{12,2}P_{23,3}) = \left(d_1, d_2, d_3\right).$$

Вычисляем ассоциатором элементом:

$$A(e_1^2, e_2, e_1) = \left(\left(e_1 \circ e_1\right) \circ e_2\right) \circ e_1 - \left(e_1 \circ e_1\right) \circ \left(e_1 \circ e_2\right) =$$

$$= (P_{11,1}P_{11,2}P_{22,1} + P_{11,1}P_{11,3}P_{23,1} + P_{11,2}P_{12,1}P_{22,2} + P_{11,3}P_{12,1}P_{23,2} + P_{11,2}P_{13,1}P_{22,3} + P_{11,3}P_{13,1}P_{23,3} - P_{11,2}P_{12,2}P_{22,1} - P_{11,3}P_{12,3}P_{33,1} - P_{11,2}P_{12,1}^2 - P_{11,3}P_{12,1}P_{13,1} - P_{11,2}P_{12,3}P_{23,1} - P_{11,3}P_{12,2}P_{23,1};$$

$$P_{11,2}^2P_{22,1} + P_{11,2}P_{11,3}P_{23,1} + P_{11,2}P_{13,2}P_{22,3} + P_{11,3}P_{13,2}P_{23,3} - P_{11,3}P_{12,3}P_{33,2} - P_{12,1}P_{11,2}P_{12,2} - P_{12,1}P_{11,3}P_{13,2} - P_{11,2}P_{12,3}P_{23,2};\ P_{11,2}P_{11,3}P_{22,1} + P_{11,3}^2P_{23,1} + P_{11,2}P_{12,3}P_{22,2} + P_{11,3}P_{12,3}P_{23,2} + P_{11,2}P_{13,3}P_{22,3} + P_{11,3}P_{13,3}P_{23,3} - P_{11,2}P_{12,2}P_{22,3} - P_{11,3}P_{12,3}P_{33,3} - P_{11,2}P_{12,1}P_{12,3} - P_{12,1}P_{11,3}P_{13,3} - P_{11,2}P_{12,3}P_{23,3} - P_{11,3}P_{12,2}P_{23,3}) = (g_1 - d_1; g_2 - d_2; g_3 - d_3).$$

Чтобы ассоциативный элемент был $A(e_1^2, e_2, e_1) \equiv 0$, следующие

$$\begin{cases} g_1 - d_1 = 0, \\ g_2 - d_2 = 0, \\ g_3 - d_3 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы система уравнений имела решение.

Система (9) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} P_{11,1}P_{11,2}P_{22,1} + P_{11,1}P_{11,3}P_{23,1} + P_{11,2}P_{12,1}P_{22,2} + P_{11,3}P_{12,1}P_{23,2} + P_{11,2}P_{13,1}P_{22,3} + P_{11,3}P_{13,1}P_{23,3} - \\ -P_{11,2}P_{12,2}P_{22,1} - P_{11,3}P_{12,3}P_{33,1} - P_{11,2}P_{12,1}^2 - P_{11,3}P_{12,1}P_{13,1} - P_{11,2}P_{12,3}P_{23,1} - P_{11,3}P_{12,2}P_{23,1} = 0, \\ P_{11,2}^2P_{22,1} + P_{11,2}P_{11,3}P_{23,1} + P_{11,2}P_{13,2}P_{22,3} + P_{11,3}P_{13,2}P_{23,3} - P_{11,3}P_{12,3}P_{33,2} - P_{12,1}P_{11,2}P_{12,2} - \\ -P_{12,1}P_{11,3}P_{13,2} - P_{11,2}P_{12,3}P_{23,2} = 0, \\ P_{11,2}P_{11,3}P_{22,1} + P_{11,3}^2P_{23,1} + P_{11,2}P_{12,3}P_{22,2} + P_{11,3}P_{12,3}P_{23,2} + P_{11,2}P_{13,3}P_{22,3} + \\ +P_{11,3}P_{13,3}P_{23,3} - P_{11,2}P_{12,2}P_{22,3} - P_{11,3}P_{12,3}P_{33,3} - P_{11,2}P_{12,1}P_{12,3} - P_{12,1}P_{11,3}P_{13,3} - \\ -P_{11,2}P_{12,3}P_{23,3} - P_{11,3}P_{12,2}P_{23,3} = 0 \end{cases}$$

ВЫВОДЫ

Когда система уравнений имеет решение, ассоциатор элемент равен нулю. Решив эту систему, получим следующее решение:

1) $\left\{P_{11,2} = 0, P_{11,3} = 0\right\}$,

2) $\left\{P_{12,1} = 0, P_{22,1} = -\dfrac{P_{11,3}P_{23,1}}{P_{11,2}}, P_{12,3} = 0, P_{22,3} = -\dfrac{P_{11,3}P_{23,3}}{P_{11,2}}\right\}$,

3) $\left\{P_{12,1} = 0,\ P_{23,1} = 0,\ P_{11,2} = 0,\ P_{12,3} = 0,\ P_{23,3} = 0\right\}$,

4) $\left\{P_{12,1} = 0,\ P_{22,1} = 0,\ P_{11,3} = 0,\ P_{12,3} = 0,\ P_{22,3} = 0\right\}$,

5) $\left\{P_{11,1} = \dfrac{P_{11,3}P_{23,1}^2 - P_{12,1}^2P_{23,2}}{P_{12,1}P_{23,1}},\ P_{11,2} = 0,\ P_{12,2} = \dfrac{P_{11,3}P_{23,1}}{P_{12,1}},\ P_{12,3} = 0,\ P_{23,3} = P_{12,1}\right\}$,

6) $\left\{P_{22,1} = \dfrac{P_{12,1}P_{12,2}}{P_{11,2}},\ P_{22,2} = \dfrac{P_{11,2}P_{12,1} - P_{11,1}P_{12,2} + P_{12,2}^2}{P_{11,2}},\ P_{11,3} = 0,\ P_{12,3} = 0,\ P_{22,3} = 0\right\}$,

7) $\left\{P_{23,1} = 0,\ P_{11,2} = 0,\ P_{13,2} = 0,\ P_{23,2} = \dfrac{P_{12,1}P_{13,1} - P_{13,1}P_{23,3}}{P_{12,1}}, P_{12,3} = 0, P_{13,3} = \dfrac{P_{12,2}P_{23,3}}{-P_{12,1} + P_{23,3}}\right\}$,

8) $\left\{P_{23,1} = 0,\ P_{11,2} = 0,\ P_{12,2} = 0,\ P_{23,2} = 0,\ P_{12,3} = 0,\ P_{23,3} = P_{12,1}\right\}$,

9) $\left\{P_{11,1} = 1,\ P_{12,1} = 0,\ P_{13,1} = 0,\ P_{13,2} = 0,\ P_{11,2} = 0,\ P_{12,3} = 0,\ P_{12,2} = 1\right\}$,

10) $\left\{P_{12,1} = 0,\ P_{13,1} = 0,\ P_{22,1} = -\dfrac{P_{11,3}P_{23,1}}{P_{11,2}},\ P_{13,2} = 0,\ P_{12,3} = 0,\ P_{13,3} = P_{12,2}\right\}$,

11) $\left\{P_{12,1}=0,\ P_{13,1}=0,\ P_{23,1}=0,\ P_{11,2}=0,\ P_{13,2}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{13,3}=P_{12,2}\right\},$

12) $\left\{P_{23,1}=\dfrac{P_{12,1}P_{23,3}}{P_{12,3}},\ P_{22,1}=0,\ P_{23,2}=-\dfrac{P_{12,1}P_{12,2}}{P_{12,3}},\ P_{22,2}=P_{12,1}+P_{23,3},\ P_{11,3}=0,\ P_{22,3}=0\right\},$

13) $\left\{P_{13,1}=0,\ P_{23,1}=0,\ P_{11,2}=0,\ P_{13,2}=0,\ P_{23,2}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{13,3}=1,\ P_{12,1}+P_{12,2}=1\right\},$

14) $\left\{P_{12,1}=0,\ P_{23,1}=0,\ P_{22,1}=0,\ P_{23,2}=0,\ P_{22,2}=P_{23,3},\ P_{11,3}=0,\ P_{22,3}=0\right\},$

15) $\left\{P_{12,1}=0,\ P_{13,1}=0,\ P_{22,1}=0,\ P_{13,2}=0,\ P_{11,3}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{13,3}=P_{12,2}\right\},$

16) $\left\{P_{23,1}=0,\ P_{22,1}=0,\ P_{23,2}=-\dfrac{P_{12,1}P_{12,2}}{P_{12,3}},\ P_{22,2}=P_{12,1},\ P_{11,3}=0,\ P_{23,3}=0,\ P_{22,3}=0\right\},$

17) $\left\{P_{12,1}=0,\ P_{13,1}=\dfrac{P_{12,3}P_{23,1}}{P_{22,3}},\ P_{22,1}=0,\ P_{23,2}=\dfrac{P_{13,2}P_{22,3}}{P_{12,3}},\right.$

$\left.P_{22,2}=\dfrac{P_{12,2}P_{22,3}-P_{13,3}P_{22,3}+P_{12,3}P_{23,3}}{P_{12,3}},\ P_{11,3}=0\right\},$

18) $\left\{P_{12,1}=0,\ P_{22,1}=-\dfrac{P_{11,3}P_{23,1}}{P_{11,2}},\ P_{12,3}=0,\ P_{22,3}=-\dfrac{P_{11,3}P_{23,3}}{P_{11,2}}\right\},$

19) $\left\{P_{22,1}=\dfrac{P_{12,1}P_{12,2}-P_{11,3}P_{23,1}}{P_{11,2}},\ P_{22,2}=\dfrac{P_{11,2}P_{12,1}-P_{11,1}P_{12,2}+P_{12,2}^{2}-P_{11,3}P_{23,2}}{P_{11,2}},\right.$

$\left.P_{12,3}=0,\ P_{22,3}=\dfrac{P_{11,3}P_{12,1}-P_{11,3}P_{23,3}}{P_{11,2}}\right\},$

20) $\left\{P_{11,1}=\dfrac{P_{12,1}P_{13,1}+P_{12,2}P_{23,1}-P_{12,1}P_{23,2}-P_{13,1}P_{23,3}}{P_{23,1}},\ P_{11,2}=0,\ P_{13,2}=0,\right.$

$\left.P_{12,3}=0,\ P_{13,3}=\dfrac{-P_{11,3}P_{23,1}+P_{12,2}P_{23,3}}{-P_{12,1}+P_{23,3}}\right\},$

22) $\left\{P_{13,2}=\dfrac{P_{12,1}P_{12,2}-P_{11,2}P_{22,1}}{P_{22,3}},\ P_{22,2}=\dfrac{P_{12,1}^{2}-P_{11,1}P_{22,1}+P_{12,2}P_{22,1}-P_{13,1}P_{22,3}}{P_{12,1}},\right.$

$\left.P_{11,3}=0,\ P_{12,3}=0,\ P_{13,3}=P_{12,2}\right\},$

$$23)\ \left\{P_{22,1}=0,\ P_{23,2}=\frac{-P_{12,1}P_{12,2}+P_{13,2}P_{22,3}}{P_{12,3}},\ P_{22,2}=\frac{P_{12,1}^{2}-P_{13,1}P_{22,3}+P_{12,3}P_{23,1}}{P_{12,1}},\ P_{11,3}=0,\right.$$

$$\left.P_{13,3}=\frac{P_{12,1}P_{12,2}P_{22,3}+P_{12,3}P_{13,1}P_{22,3}-P_{12,3}^{2}P_{23,1}+P_{12,1}P_{12,3}P_{23,3}}{P_{12,1}P_{22,3}}\right\},$$

$$24)\left\{P_{11,1}=\frac{P_{11,2}P_{22,1}-P_{11,2}P_{13,1}P_{22,3}+P_{11,3}P_{23,1}-P_{11,3}P_{13,1}P_{23,3}}{P_{11,2}P_{22,1}+P_{11,3}P_{23,1}},\ P_{12,1}=0,\ P_{12,3}=0,\right.$$

$$\left.P_{13,2}=\frac{-P_{11,2}^{2}P_{22,1}-P_{11,2}P_{11,3}P_{23,1}}{P_{11,2}P_{22,3}+P_{11,3}P_{23,3}},\ P_{13,3}=\frac{-P_{11,2}P_{11,3}P_{22,1}+P_{11,2}P_{22,3}-P_{11,3}^{2}P_{23,1}+P_{11,3}P_{23,3}}{P_{11,2}P_{22,3}+P_{11,3}P_{23,3}}\right\}.$$

При выполнении этого условия алгебра $\langle E,\circ\rangle$ является йордановной алгеброй.

REFERENCES

1. Ганиходжаев Р.Н. Исследования по теории квадратичных стохастических операторов, Дисс. на соис. уч. ст. докт. наук, Ташкент, 1994.
2. Н. П. Соколов. Пространственные матрицы и их приложения. Москва 1960.
3. Ю.И.Любич. Математические структуры популяционной генетике.
Киев : Наук. думка, 1983.
4. Маркус М.,Минк Х. Обзор по теории матриц и матричным неравенствам. «Наука», М., 1972.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. «Наука» , М., 1967.
6. Нарзиев Н.Б. Алгебраические структуры, возникающие в задачах популяционной генетики, Дисс. на соис. уч. ст. кандидата наук, Ташкент, 2011.