ARALASH TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN AYRIM CHEGARAVIY MASALALARNING TAHLILI HAQIDA

Norkulova Maftuna Normurod qizi
Termez davlat universiteti magistri

https://doi.org/10.5281/zenodo.7352350

Annotasiya. *Maqolada oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar, ularning kelib chiqish tarixi hamda amaliy tadbiqlari haqida qisqacha ma'lumotlar keltirilgan. Aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish yo'llari tahlil qilingan va umumiy g'oyasi yoritilgan. Misol sifatida umumlashgan Trikomi tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirilishi, Trikomi masalasi yechimining yagonaligi va mavjudligi bayon qilingan. Mazkur yo'nalishda chop qilingan bir qator maqolalar tahlil qilingan.*

Kalit so'zlar: *oddiy differensial tenglamalar, xususiy hosilali differensial tenglamalar, funksiya, Koshi masalasi, chegaraviy masalalar, korrekt qo'yilgan chegaraviy masala, buzilish chizig'i, elliptik va giperbolik tipli tenglamalar, xarakteristik tenglama, aralash tipdagi tenglama, parabolic buzilish chizig'i, yechimining yagonaligi, yechimning mavjudligi, Gauss tenglamasi.*

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Аннотация. *Статья содержит краткую информацию об обыкновенных дифференциальных уравнениях и уравнениях в частных производных, а также их истории возникновении и практических приложениях. Проанализированы методы решения краевых задач для уравнений смешанного типа и изложена общая идея. В качестве примера описаны каноническое представление обобщенного уравнения Трикоми, единственность и существование решения задачи Трикоми. Проанализирован ряд статей, опубликованных в этом направлении.*

Ключевые слова: *обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с частными производными, функция, задача Коши, краевые задачи, корректная краевая задача, линия вырождения, уравнения эллиптического и гиперболического типов, характеристическое уравнение, уравнение смешанного типа, параболическая линия вырождения, единственность решения, существование решения, уравнение Гаусса.*

ANALYSIS OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR EQUATIONS OF MIXED TYPE

Abstract. *The article contains brief information about ordinary and partial differential equations, their history and practical applications. Methods of solving boundary value problems for mixed-type equations are analyzed and the general idea is explained. As an example, the canonical representation of the generalized Tricomi equation, the uniqueness and existence of the solution to the Tricomi problem are described. A number of articles published in this direction have been analyzed.*

Keywords: *ordinary differential equations, differential equations with particular derivatives, function, Cauchy problem, boundary value problems, well-posed boundary value problem, fault line, elliptic and hyperbolic type equations, characteristic equation, equation of mixed type, parabolic fault line 'i, uniqueness of solution, existence of solution, Gaussian equation.*

KIRISH

Eng avvalo oddiy differensial tenglamalar va xususiy hosilali differensial tenglamalar haqidagi umumiy tushunchalarga to‘xtalamiz. Differensial tenglamalar - bu noma’lum funksiyalar, ularning turli tartibli hosilalari va erkli o‘zgaruvchilar ishtirok etgan tenglamalardir. Differensial tenglamalar nazariyasi XVII asrning oxirida differensial va integral hisobning paydo bo‘lishi bilan bir vaqtda rivojlana boshlagan. Differensial tenglamalar matematikada, ayniqsa, uning tadbiqlarida juda katta ahamiyatga ega. Fizika, mexanika, biologiya, iqtisodiyot, texnika va boshqa sohalarning turli masalalarini o‘rganishda oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarni (sistemalarni) yechishga olib kelinadi. Xususiy hosilali differensial tenglamalarni oddiy differensial tenglamalardan farqli bo‘lgan muhim xususiyati shuki, ularning barcha yechimlari, ya’ni «umumiy yechimi» ixtiyoriy o‘zgarmaslarga emas, balki ixtiyoriy funksiyalarga bog‘liq bo‘ladi. Differensial tenglamalarning tartibi noma’lum funksiyaning hosilasi tartibiga teng. Bir noma’lumli birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish oddiy differensial tenglamalar sistemasini yechishga olib kelinadi.

Ma’lumki, hozirgi zamon texnika asri hisoblanib, uni tez rivojlanishi barcha aniq fanlar oldida yangidan-yangi vazifalar qo‘ymoqda. Oddiy differensial tenglamalar, shu jumladan xususiy hosilali differensial tenglamalar sohasini rivojlantirishga e’tiborni ko‘proq kuchaytirishni talab qilmoqda. Bunga asosiy sabab texnik masalalarni hal qilish yangi chegaraviy masalalarni yechish usullarini takomillashtirish va ularning amaliy tadbiqlarini ta’minlash zarur bo‘lmoqda.

Differensial tenglamalarga keltirilayotgan biologik, fizik, texnik mexanik masalalardan boshqa, ekologiya, biologiya, meditsina, kimyo va boshqa fanlarni ham amaliy masalalarini matematik modellari oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarga keladi. Tenglamalar uchun korrekt (to‘g‘ri) qo‘yilgan chegaraviy masalani o‘rganish zaruriyati ham dolzarb hisoblanadi. YUqorida aytilgan boshlang‘ich va chegaraviy masalalar ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar, shundan buzilish chizig‘iga ega elliptik va giperbolik tipdagi tenglamalarni ham o‘rganish zarurligini namoyon qiladi.

Buzilish chizig‘iga ega elliptik tipdagi tenglama deb masala qaralayotgan sohada tenglama elliptik tip, soha chegarasini bir qismi yoki chegarani o‘zida boshqa turga tegishli bo‘lgan tenglamaga aytiladi. Tur o‘zgaradigan chiziqqa buzilish chizig‘i deb aytiladi. Bu chiziqda qaralayotgan tenglama parabolik tipga tegishli yoki aniqlanmagan ham bo‘lishi mumkin.

Shu o‘rinda aytish joizki, O‘zbekiston Prezidentining 07.05.2020 yildagi PQ-4708-sonli «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida» qarorida matematika sohasida ilmiy-tadqiqotlarni ishlab chiqarish bilan birga uzviy bog‘liqligini ta’minlash, amaliy matematikani rivojlantirish va iqtisodiyot tarmog‘idagi muammoni modellashtirish asosida matematik yechimlarni ishlab chiqish topshiriqlari belgilangan.

Amaliy xarakterdagi muhim masalalarni hal qilishda, xususan, sirtlarni cheksiz bo‘lgan kichik egilishlar nazariyasi, gaz dinamikasi, qobiqlarni momentsiz nazariyasiga oid masalalar zamonaviy matematik fizikani buzilish chizig‘iga ega elliptik tipdagi tenglamalar sohasidagi masalalarga olib kelishini e’tiborga olsak, bu soha dolzarb ekanligi namoyon bo‘ladi. Shu sababli ham bunday tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalar o‘rganish ko‘plab xorijlik va o‘zbek olimlarini e’tiborini tortmoqda. Matematik fizika fanni rivojlanishi shuni ko‘rsatmoqdaki, buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan elliptik, parabolik va giperbolik tipdagi tenglamalar haqiqiy fizik va biologik jarayonlarning samarali matematik modelidir. Bu o‘z navbatida ko‘plab xorijlik va o‘zbek olimlari tomonidan fundamental tadqiqotlar mavzusi bo‘lib, turli xil chegaraviy muammolarni belgilash va hal qilishni dolzarbligiga olib kelmoqda.

Aralash tipdagi tenglamalar nazariyasini markaziy muammolari yechimning silliqligi va chegaraviy masalalar nazariyasidir. XX asrda chiziqli va chiziqli bo‘lmagan bitta va ikkita buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglamalar nazariyasida ajoyib natijalarga erishilgan.

ASOSIY QISM

Maqolada quyidagi aralash tipdagi (elliptiko-giperbolik tip, buzilish chizig‘ida parabolik tipga tegishli)

$$signy\,|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, m = const > 0 \qquad (1)$$

tenglamani qaraymiz, bu yerda $m -$ musbat haqiqiy son.

Xarakteristik tenglama $signy\,|y|^m \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}x^2 = 0$ ko‘rinishiga ega bo‘ladi (Салохитдинов М.С. Математик физика тенгламалари, Тошкент, «Ўзбекистон, 2002 йил, 448 б.). $y > 0$ yarim tekislikda (1) tenglama haqiqiy xarakteristikalarga ega emas, $y < 0$ yarim tekislikda xarakteristik egri chiziqlar tenglamasi $(dx - (-y)^{\frac{m}{2}}dy)\left((dx + (-y)^{\frac{m}{2}}dy\right) = 0$ bo‘ladi. Uni shu ko‘rinishda yozib va integrallab, $y < 0$ yarim tekislik ikkita $x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = const, x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = const$ xarakteristik egri chiziqlar oilasini topamiz.

Agar umumiy holdagi ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani

$$A_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C_1\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \bar{F}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

A, B va C koeffitsientlari beilgan D sohada yetarli silliq funksiyalar bo‘lsa, x va y o‘zgaruvchilarning maxsus bo‘lmagan quyidagi $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ almashtirishlar mavjud bo‘ladiki, uni tenglama D sohada bu almashtirish yordamida quyidagicha kanonik ko‘rishdan biriga keladi:

- elliptik tip: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \tilde{F}\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0;$
- giperbolik tip: $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \tilde{F}\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0$ yoki $u_{\xi\eta} + \tilde{F}\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0;$
- parabolik tip: $u_{\eta\eta} + \tilde{F}\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0.$

Xususiy hosilali differensial tenglama tekshirilayotgan sohani har bir qismida elliptik tipga, ikkinchi qismida esa giperbolik tipga tegishli bo’lsa, uni aralash tipga tegishli tenglama deyiladi. Bu qismlar o’tish chizig’i (yoki sirti) bilan ajraladi, bu chiziqda tenglama yoki parabolalik buziladi, yoki aniqlanmagan bo’ladi. Aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalani XX asrning yigirmanchi yillarida birinchi marta Italiyalik matematik Franchesko Trikomi

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

tenglama uchun qo’ygan va o‘rgangan.

Maqolada Trikomi tenglamasining umumlashgan holi (1) tenglamani o’rganamiz.

Bu tenglama $y = 0$ o’qning ixtiyoriy qismini o’z ichiga olgan sohada aralash tipga tegishli bo’ladi, ya’ni $y > 0$ yarim tekislikda elliptic tip, $y < 0$ da giperbolik tip, $y = 0$ da parabolik tipga tegishli bo‘ladi, ya’ni parabolik buzuladi ham deb aytiladi. $m = 0$ da (1) tenglama $signyu_{xx} + u_{yy} = 0$ ko’rinishga ega bo’ladi. Bu aralash tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili sifatida o'rganishni akademik Lavrentev M.A. tavsiya qilgan va uning uchun turli masalalar akademik Bisadze A.V. tomonidan o'rganilgan. Shuning uchun ham bu tenglama Lavrentev – Bitsadze tenglamasi deb ataladi.

Endi (1) uchun chegaraviy masalani o'rganish bilan shug'ullanamiz. (1) tenglama uchun Trikomi masalasini (T) qaraymiz. $D-$ soha $y>0$ tekislikda $[-1,1]$ kesma va $A(-1,0)$ va $B(1,0)$ nuqtalardan chiquvchi silliq σ egri chiziq bilan chegaralangan. $y<0$ da $[-1,1]$ kesma hamda $A(-1,0)$ va $B(1,0)$ nuqtalardan chiquvchi (1) tenglamaning xarakteristikalari bilan chegaralangan.

T masala. D sohada regulyar, $\overline{D}$ da uzluksiz σ egri chiziqda va xarakteristikalardan bittasida, masalan AC da berilgan

$$u(x,y)|_{\sigma}=\varphi(s), u\ |_{AC}=\psi(x)$$

qiymatlarni qabul qiluvchi (1) tenglamaning echimi topilsin, bu erda $\varphi(l)=\psi(0), l-\ \sigma$ egri chiziqning uzunligi, $S-\ A$ va V nuqtalardan chiquvchi xarakteristikalarning kesishgan nuqtasi.

Aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning asosiy g'oyasi quyidagidan iborat. Elliptik qismda N masalasi, giperbolik qismda Koshi-Gursa (Koshi) masalasi yechiladi. Izlanayotgan funksiya, ya'ni masala shartiga ko'ra, izlanayotgan echim yopiq sohada uzluksiz, shuning uchun parabolik buzilish chizig'ida funksiyaning $(\mathrm{U}(x,+0)=\mathrm{U}(x,-0),-1\leq x\leq 1$, bunda elliptik va giperbolik qismdan topilgan yechimlarning) qiymatlari tenglashtiriladi. Natijada funksiyani birinchi tartibli hosilasiga nisbatan integro-differensial tenglamaga ega bo'lamiz.

Masala shartidan kelib chiqsak, parabolik buzilish chizig'ida izlanayotgan funksiya hosilasining $(U_y(x,+0)=U_y(x,-0),-1<x<1$, bunda elliptik va giperbolik qismdan topilgan yechimlarning) qiymatlari o'zaro teng hisoblanadi. Olingan singulyar integro-differensial tenglama Kaleman-Vekua (Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегралные уравнения, Москва, Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1968 г., 513 с.) usuli yordamida regulyarizatsiya qilinib, Fredgolmning 2-tur tenglamasiga keltiriladi. Frelgolmning 2-tur tenglamasi berilgan funksiyalarga nisbatan tegishli shartlar bajarilganda yagona echimga ega bo'lishidan foydalanib, echimning mavjudligi isbotlaniladi. CHegaraviy masala echimining yagonaligi esa Xopf va Zaremba – Jira prinsipi hamda Darbu formulasidan foydalanilib, isbotlanadi.

T masalasining echimini mavjudligini isbotlaymiz. Ma'lumki, $y<0$ yarim tekislikda (1) tenglama giperbolik tipga tegishli bo'lib, u

$$-(-y)^m u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (2)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Asosiy maqsad (2) tenglama uchun boshlang'ich shartlar parabolic buzilish chizig'ida berilganda Koshi masalasini o'rganish hisoblanadi. (2) tenglamani $A\ (-1;0)\ B\ (1;0)$ kesmada

$$\lim_{y\to 0} u(x,y)=\tau\ (x), \lim_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\ (x)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimi topilsin, bu yerda $\tau(x)$ va $\nu(x)$ – berilgan funksiyalar bo'lib, ikkinchi tartibgacha hosilalari bilan uzluksizdir.

(2) tenglama $\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}$, $\eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}$ xarakteristik koordinatalarda ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{m}{2(m+2)}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{m}{2(m+2)}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0 \qquad (3)$$

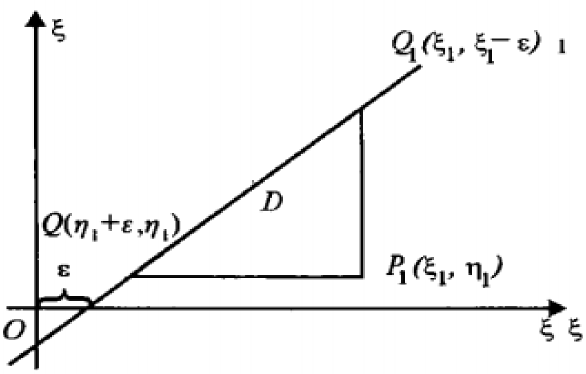
ko’rinishida yoziladi.

Ushbu tenglama uchun Riman funksiyasini tuzish akademik (Салохитдинов М.С. Математик физика тенгламалари, Тошкент, «Ўзбекистон, 2002 йил, 448 б.) va M.M.Smirnovning (Уравнение смешанного типа. Москва, Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1970 г., 296 с.) асарларида keltirilgan. YUqoridagi tenglama uchun Riman funksiyasi quyidagicha yoziladi:

$$R(\xi,\eta;\ \xi_1,\eta_1) = (\xi-\eta)^{m/(m+2)}[(\xi-\eta_1)(\xi_1-\eta)]^{-m/(m+2)} \times F\left(\frac{m}{2m+4}, \frac{m}{2m+4}, 1, \frac{(\xi_1-\xi)(\eta-\eta_1)}{(\xi_1-\eta)(\xi-\eta_1)}\right).$$

Koshi masalasini yechimini topamiz. $\eta-\xi=0$ to’g’ri chiziq xarakteristik almashtirish uchun maxsus chiziqdir, ya’ni bu chiziqda (3) tenglamaning koeffitsientlari cheksizlikka intiladi. Shu bilan birga $\xi \geq \eta+\varepsilon$ yarim tekislikda ($\varepsilon-$ musbat son) (3) tenglama uchun Koshi masalasi oddiy usul bilan yechiladi. Koshi masalasi boshlang’ich shartlar $y=0$ parabolik buzilish chizig’ida berilganda maxsus tekshirishni talab qiladi.

D orqali $\xi = \eta+\varepsilon, \varepsilon>0$ to’g’ri chiziqning $Q(\eta_1+\varepsilon,\eta_1)Q_1(\xi_1,\xi_1-\varepsilon)$ kesmani va (3) tenglamaning $QP: \eta=\eta_1,\ Q_1P: \xi=\xi_1$ xarakteristikalari bilan chegaralangan sohani belgilaymiz
(1-chizma):



1-chizma

(3) tenglamaning ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $u(\xi,\eta)$ yechimi uchun quyidagi ayniyat o’rinli bo’ladi:

$$u(\xi_1,\eta_1) = \frac{1}{2}u(\eta_1+\varepsilon,\eta_1)R(\eta_1+\varepsilon,\eta_1,\xi_1,\eta_1) + \frac{1}{2}u(\xi_1,\xi_1\ \varepsilon)$$
$$R(\xi_1,\xi_1-\varepsilon,\xi_1,\eta_1) +$$
$$1/2\int_{\overleftarrow{\sigma}}\left\{\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial N}R(\xi,\eta;\ \xi_1,\eta_1) - u(\xi,\eta)\frac{\partial R(\xi,\eta;\ \xi_1,\eta_1)}{\partial N} + \right.$$
$$\left. 2u(\xi,\eta)R(\xi,\eta;\ \xi_1,\eta_1)\cdot\left(-\frac{m}{2m+4}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{d\xi}{dn} + \frac{m}{2m+4}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{d\eta}{dn}\right)\right\}_{\eta=\xi-\varepsilon} ds.$$

Ushbu $\frac{d\xi}{dn}ds = -d\eta, \frac{d\eta}{dn}ds = d\xi$ va QQ_1 da $d\xi = d\eta$ hamda

$$\frac{\partial}{\partial N}ds = \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{d\eta}{dn}\ ds + \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{d\xi}{dn}\ ds = \left(\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}\right)d\xi$$

tengliklarni e’tiborga olib, avvalgi ayniyatni

$$u(\xi_1,\eta_1)=\frac{1}{2}u(\eta_1+\varepsilon,\eta_1)R(\eta_1+\varepsilon,\eta_1,\xi_1,\eta_1)+$$
$$\frac{1}{2}u(\xi_1,\xi_1-\varepsilon)R(\xi_1,\xi_1-\varepsilon,\xi_1,\eta_1)-\frac{1}{2}\int_{\eta_1+\varepsilon}^{\xi_1}u(\xi,\xi-\varepsilon)\cdot$$
$$\left[\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}-\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}-\frac{2m}{m+2}\times\frac{1}{\xi-\eta}R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\right]_{\eta=\xi-\varepsilon}d\xi+$$
$$\frac{1}{2}\int_{\eta_1+\varepsilon}^{\xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\eta=\xi-\varepsilon}R(\xi,\xi-\varepsilon;\xi_1,\eta_1)d\xi$$

ko'rinishda yozib olamiz. Gipergeometrik funksiyalarning xossasidan foydalanib, sodda hisoblashlarni bajargandan so'ng

$$\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{\partial r}{\partial\eta}-\frac{2m}{m+2}\frac{1}{\xi-\eta}R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)|_{\xi=\eta}=$$
$$\frac{4}{m+2}\frac{\Gamma(-2/(m+2))}{\Gamma^2(-2/(m+2))}(\xi_1-\eta_1)^{2/(m+2)}[(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)]^{-\frac{m+4}{2m+4}}$$

tenglikni hosil qilamiz. Ushbu $\Gamma(1+x)=x\,\Gamma(x)$ formula va boshlang'ich shartlarning birinchisiga asosan,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\partial R}{\partial\xi}-\frac{\partial R}{\partial\eta}-\frac{2m}{m+2}\frac{1}{\xi-\eta}R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)\right]_{\eta=\xi-\varepsilon}u(\xi,\xi-\varepsilon)$$
$$=-\frac{4}{(m+2)\Gamma^2(m/(2m+4))}(\xi_1-\eta_1)^{2/(m+2)}[(\xi-\eta_1)(\xi_1-\xi)]^{-(m+4)/(2m+4)}\tau(\xi)$$

bo'ladi. Ikkinchi boshlang'ich shartga asosan

$$R\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\eta=\xi-\varepsilon}(\xi,\xi-\varepsilon;\xi_1,\eta_1)=$$
$$=\left(\frac{4}{m+2}\right)^{m/(m+2)}\frac{4}{(m+2)\Gamma^2(m/(2m+4))}[(\xi-\eta_1)(\xi_1-\xi)]^{-m/(2m+4)}\nu(\xi)$$

ega bo'lamiz. Shu bilan birga $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}R(\xi,\xi-\varepsilon;\xi_1,\eta_1)=0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}R(\eta_1+\varepsilon,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=0$. YUqoridagi tengliklarga ko'ra, $\varepsilon\to 0$ da quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$u(\xi_1,\eta_1)=\frac{\Gamma(m/(m+2))}{\Gamma^2(m/(2m+4))}(\xi_1-\eta_1)^{2/(m+2)}\int_{\eta_1}^{\xi_1}\tau(\xi)[(\xi-\eta_1)(\xi_1-\xi)]^{-m/(2m+4)}d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{m/(m+2)}\frac{\Gamma(m/(m+2))}{\Gamma^2(m/(2m+4))}\int_{\eta_1}^{\xi_1}\nu(\xi)[(\xi-\eta_1)(\xi_1-\xi)]^{-m/(2m+4)}d\xi.$$

$\xi=\frac{\xi_1-\eta_1}{2}t+\frac{\xi_1+\eta_1}{2}$ almashtirishni bajarib, so'ngra $\xi_1=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}$, $\eta_1=x-\frac{2}{m+2}(y)^{(m+2)/2}$ larga asosan oldingi (x,y) o'zgaruvchilarga qaytsak, ushbu

$$u(x,y)=2^{(m+2)/2}\frac{\Gamma(m/(m+2))}{\Gamma^2(m/(2m+4))}\int_{-1}^{1}\tau\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}t\right](1-t^2)^{-(m+4)/(2m+4)}dt$$
$$+2^{(m+2)/2}\frac{\Gamma((m+4)/(m+2))}{\Gamma^2((m+4)/(2m+4))}y\int_{-1}^{1}\nu\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}t\right](1-t^2)^{-m/(2m+4)}dt \quad (4)$$

formulani hosil qilamiz. Ushbu formula Darbu formulasi deyiladi.

Berilgan $\tau(x)$ va $\nu(x)$ funksiyalar ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, (4) formula bilan aniqlangan $u(x,y)$ funksiya x va y bo'yicha ikkinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lib, (2) tenglamani hamda boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi. Bu (4) formula Koshi masalasi yechimining yagonaligi, (2) tenglamani $\xi>\eta$ yarim tekislikda o'zining ikkinchi tartibgacha hosilalari bilan uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy yechimi uchun o'rinli bo'lgan ayniyatning natijasi ekanligidan kelib chiqadi. (4) formulani ko'rinishidan yechim boshlang'ich shartlarga uzluksiz bog'langanligi, ya'ni turg'unligi ham darhol kelib chiqadi.

Endi (1) tenglamani yechilishini elliptik sohada o'rganamiz. Tenglamani $y>0$ yarim tekislikda, ya'ni tenglama elliptik bo'lganda u

$$E(u) = y^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{5}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

(5) tenglamaning fundamental yechimlarini ko'rib chiqamiz. Ma'lumki, Laplas tenglamasi, ya'ni (5) da $m = 0$ bo'lganda, ikki nuqta orasidagi masofaga bog'liq bo'lgan $\ln\frac{1}{r}$ fundamental yechimga ega. Xuddi shunga o'xshash, (5) tenglamaning ham ikki nuqta orasidagi masofalarga bog'liq bo'lgan fundamental yechimlari mavjud. Bu yechimlarni topish maqsadida ushbu

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (\xi-\eta)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}} \pm \eta^{\frac{m+2}{2}}\right)^2, \rho = \frac{r^2}{r_1^2}, \beta = \frac{m}{2(m+2)}$$

belgilashlarni kiritib, (5) tenglamaning yechimini

$$u = (r_1^2)^{-\beta}\,\omega(\rho)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu funksiyani ikkinchi tartibli hosilalarini hisoblab, (5) tenglamaga qo'yganimizdan keyin $\omega(\rho)$ funksiyaga nisbatan

$$\rho(1-\rho)\omega'' + [1-(1+2\beta)\rho]\omega' - \beta^2\omega = 0 \tag{6}$$

tenglamaga ega bo'lamiz. (6) tenglama Gauss tenglamasidan ibborat bo'lib, u $\rho = 1$ atrofida ikkita chiziqli bog'liq bo'lmagan

$$\omega_1(\rho) = F(\beta,\beta,2\beta,1-\rho),\ \omega_2(\rho) = (1-\rho)^{1-2\beta}F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta,1-\rho)$$

yechimlarga ega. Bulardan (5) tenglamaning ikkita yechimini hosil qilamiz:

$$g_1(x,y;\xi,\eta) = k_1(r_1^2)^{-\beta}F(\beta,\beta,2\beta,1-\rho),$$

$$g_2(x,y;\xi,\eta) = \left(k_2\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}(r_1^2)^{-\beta}(1-\rho)^{1-2\beta}\ F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta,1-\rho),$$

bu yerda k_1 va $k_2 -$ o'zgarmaslardir. Gipergeometrik funksiyalar xossasidan foydalanib, yechimlarni logarifmik maxsuslikka ega ekanligi ko'rsatish mumkin.

Demak, ular (5) tenglamaning fundamental yechimlar barcha x lar uchun

$$\left.\frac{\partial g_1(x,y;\xi,\eta)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ \ g_2(x,0;\xi,\eta) = 0$$

shartlarni qanoatlantirishini tekshirib ko'rish qiyin emas. Shu bilan birga fundamental yechimlar $(x,y),(\xi,\eta)$ nuqtalarga nisbatan simmetriklikdir. Bundan tashqari, $k_1 = \frac{1}{4\pi}(4/(m+2))^{2\beta}\frac{G^2(\beta)}{G(2\beta)}$, $k_2 = \frac{1}{4\pi}(4/(m+2))^{2-2\beta}\frac{G^2(1-\beta)}{G(2-2\beta)}$ deb hisoblaymiz.

Asosiy tenglama uchun chegaraviy masalalarni qo'yilishi, yechimning mavjudligi va yagonaligini o'rganamiz. D orqali x o'qining $(-1,1) = I$ kesmasi va $y > 0$ yarim tekislikda yotuvchi, uchlari A va B nuqtalarda bo'lgan silliq σ egri chiziq bilan chegaralangan sohani belgilab olamiz.

Elliptik tenglama uchun Dirixle masalasi quyidagicha qo'yiladi: D sohada regulyar, yopiq $\overline{D}$ sohada uzluksiz va

$$u\,|_\sigma = \varphi(s), \qquad u\,|_{\bar{J}} = \tau(x)$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi (5) tenglamaning yechimi topilsin, bu yerda s – B nuqtadan hisoblanadigan σ egri chiziq yoyining uzunligi, $\varphi(s)$ va $\tau(x) -$ berilgan uzluksiz funksiyalar, shu bilan birga $\tau(A) = \varphi(l), \tau(B) = \varphi(O)$, l bu $\sigma -$ egri chiziq uzunligi.

N masalasi. D sohada regulyar, yopiq $\overline{D}$ sohada uzluksiz va

$$\mathrm{u}\,|_\sigma = \varphi(s), \quad \lim_{y\to 0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \nu(x), \qquad x \in I$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (5) tenglamani yechimi topilsin, bunda $\varphi(s),\ 0 \leq s \leq 1$ da berilgan uzluksiz funksiya, $\nu(x)$ esa I da berilgan uzluksiz funksiya bo'lib, bu intervalning chetki nuqtalarida $2/(m+2)$ dan kichik bo'lgan tartibda cheksizlikka intilishi mumkin.

Bu masalalar yechimlarining yagonaligini isbotlash uchun elliptik tipdagi tenglamalar nazariyasidan ikkita dalilni keltirib o'tamiz.

Chegarasi S bo'lgan D sohada

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_1\frac{\partial u}{\partial y} + c_1 u = 0 \qquad (7)$$

tenglamani o'raganmiz. D sohada $a\partial y^2 + 2bdxdy + c\partial x^2 = 0$ shakl musbat aniqlangan, ya'ni (5) tenglama elliptik tipga tegishli bo'lsin.

Xopf prinsipi. Agar $u(x,y)$ funksiya (7) tenglamaning aynan nolga teng bo'lmagan D sohada regulyar, $D \cup S$ da uzluksiz yechimi bo'lib, $c_1 \leq 0$ shart bajarilsa, u holda barcha D sohada $|u| < max_s|u|$, agarda $c_1 = 0$ bo'lsa $min_s\mathrm{u} < \mathrm{u} < max_s|\mathrm{u}|$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Zaremba – Jiro prinsipi. $u(x,y)$ funksiya elliptik tipga tegishli bo'lgan (7) tenglamani D sohadagi regulyar yechimi bo'lsin. Agar D soha S chegarasini P nuqtasida $u(x,y)$ o'zining ekstremal qiymatini qabul qilib, S kontur shunday xossaga ega bo'lsaki, D da yotuvchi P nuqtadan k aylanacha o'tkazish mumkin bo'lsa, u holda k aylanachani markaziga qarab yo'nalgan r radius bo'yicha olingan $\frac{\partial u}{\partial r}$ hosila (agar mavjud bo'lsa) P nuqtada noldan farqli bo'ladi. Shu bilan birga maksimum bo'lgan holda $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$, minimum bo'lgan holda esa $\frac{\partial u}{\partial r} > 0$ bo'ladi.

Demak, ushbu lemmalardan Dirixle masalasining yechimi yagona bo'lishi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar $u_1(x,y)$ va $u_2(x,y)$ funksiyalar (5) tenglamani chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi ikkita yechim bo'lsa, bularning ayirmasi $u = u_1 - u_2$ (5) tenglamani va $u|_\sigma = 0,\ u|_{\bar{J}} = 0$ bir jinsli chegaraviy shartni qanoatlantiradi. Bundan, Xopf prinsipiga asosan $u = 0$, ya'ni $u_1 = u_2$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shunga o'xshash N masala ham bittadan ortiq yechimga ega bo'lmaydi. Bu fikrning to'g'riligi yuqorida keltirilgan ikki prinsipdan darhol kelib chiqadi.

Ushbu

$$uE\,(v) - vE\,(v) = \frac{\partial}{\partial x}\left[y^m\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ayniyatni tekshirib ko'rish qiyin emas. Bu ayniyatning har ikki tomonini $y > 0$ yarim tekislikda yotuvchi σ egri chiziq bilan chegaralangan D soha bo'yicha integrallab, so'ngra Gauss – Ostrogradskiy formulasini qo'llaymiz:

$$\int_D[\mathrm{uE}(v) - v\mathrm{E}(v)]dxdy = \int_G \left[y^m\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]cos(n,x) +$$

$$+\left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)cos(n,y)]ds,$$

bu yerda $n - \sigma$ egri chiziqqa o'tkazilgan tashqi normal, $\frac{dy}{ds} = cos(n,x)$, $\frac{dx}{ds} = -sin(n,x)$, tengliklarni e'tiborga olib, $A_s\,[\cdot] = y^m\frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial y}$ belgilanishni kiritsak, avvalgi tenglik quyidagicha yoziladi:

$$\int_D[\mathrm{uE}(v) - v\mathrm{E}(v)]dxdy = \int_D (uA_s[v] - vA_s[v])\,ds. \qquad (8)$$

Bu formula Grin formulasi deyiladi.

Agar u , v − (5) tenglamaning yechimlari bo'lsa, (8) dan

$$\int_D \ (uA_s[v] - \ vA_s[v])ds = 0 \qquad (9)$$

formula hosil bo'ladi.

Odatda A_s [·] ifoda konormal hosila deyiladi. (8) formulada $v \ = \ 1$ bo'lib, u funksiya (5) tenglamaning yechimi bo'lsa, u ni u^2 bilan almashtirib ushbu

$$\int_{\mathrm{D}}[y^m \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2]dxdy \ = \int_{\mathrm{D}} uA_s[u]ds$$

formulaga ega bo'lamiz. Nihoyat, (9) formulada $v \ = 1$ desak, $\int_\sigma \ A_s \,[u]ds \ = 0$ bo'ladi. Ya'ni (5) tenglama D sohadagi yechimining konormal hosilasidan sohaning chegarasi bo'yicha olingan integral nolga teng.

(5) tenglama uchun N masalasining Grin funksiyasi deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $G_1(\xi,\eta;x,y)$ funksiyaga aytiladi: 1) $G_1(\xi,\eta;x,y)$ funksiya (x,y) nuqtadan tashqari barcha D sohada (5) tenglamaning yechimidan iborat; 2) Ushbu

$$G_1(\xi,\eta;x,y)|_\sigma = \ 0, \frac{\partial \mathrm{G1}}{\partial \eta}|_{\eta=0} = 0, (x,y) \in D$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi; 3) $G_1(\xi,\eta;x,y) = g_1(\xi,\eta;x,y) + v_1(\xi,\eta;x,y)$ ko'rinishga ega bo'ladi, bunda $g_1(\xi,\eta;x,y)$ (5) tenglamaning fundamental yechimi, $v_1(\xi,\eta;x,y)$ esa barcha D sohada (5) tenglamaning (x,y) bo'yicha ham, (ξ,η) bo'yicha ham regulyar yechimidir. Grin funksiyasi tuzilishiga ko'ra,

$$v_1(\xi,\eta;x,y)|_\sigma = -g_1(\xi,\eta;x,y)|_\sigma, \frac{\partial v_1(\xi,\eta;x,y)}{\partial \eta}|_\sigma = 0, (x,y) \in D$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $v_1(\xi,\eta;x,y)$ regulyar qismini topishga keladi. Egri chiziq normal egri chiziq deb ataluvchi σ_0: $x^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2} = 1$ egri chiziq bilan ustma-ust tushganda Grin funksiyasini darhol yozib olishimiz mumkin. U ushbu

$$G_1(\xi,\eta;x,y) = g_1(\xi,\eta;x,y) - R^{-2\beta} \ g_1(\xi,\eta;\bar{x},\bar{y})$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda $R^2 \ = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}, \ \bar{x} \ = \frac{x}{R^2}, \ \bar{y}^{\frac{m+2}{2}} = \frac{y^{(m+2)/2}}{R^2}$.

N masalani yechimini yozib olamiz (Салохитдинов М.С. Математик физика тенгламалари, Тошкент, «Ўзбекистон, 2002 йил, 448 б.) σ_0 normal egri chiziq va $y = \delta$ to'g'ri chiziqning kesmasi bilan chegaralangan sohani D_δ orqali belgilaymiz. $y = \delta$ to'g'ri chiziqning σ_0 bilan kesishish natijasida hosil bo'lgan nuqtalarning abssissalarini x_1 va x_2 orqali belgilaymiz. D_δ sohaning (x,y) nuqtasini markaz qilib yetarli kichik ε radiusli va D_δ da to'la yotuvchi C_ε aylana chizamiz. σ_0, x_1x_2 va C_ε bilan chegaralangan sohada Grin funksiyasi $G_1(\xi,\eta;x,y)$ (5) tenglamaning regulyar yechimidan iborat bo'ladi. $u(x,y)$ funksiya berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi (5) tenglamaning regulyar yechimi bo'lsin. Bu ikki funksiyaga (9) formulani qo'llaymiz:

$$\int_{\sigma_0+x_1x_{2+}C_\varepsilon} \ (uA_S\,[G_1] - G_1A_S\,[u]) \ ds = 0.$$

Berilgan shartlarni etiborga olsak,

$$\int_{\overleftarrow{\sigma_0}} \ \varphi(s)A_S[G_1]\,ds + \int_{x_1}^{x_2} \ v\,(\xi)G_1 \ (\xi,0,x,y)d\xi + \int_{\overrightarrow{C_\varepsilon}} \ (uA_t\,[G_1] - G_1A_t[u])dt = 0$$

yoki

$$-\int_{\overleftarrow{C_\varepsilon}} \ (uA_t\,[G_1] - G_1A_t[u])dt = -\int_{x_1}^{x_2} \ v\,(\xi)G_1 \ (\xi,0,x,y)d\xi - \int_{\sigma_0} \ \varphi(S)A_S[G_1]\,ds$$

tenglik hosil bo'ladi. C_ε tenglamasini hozircha $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ desak, bevosita hosilalarni hisoblash natijasida ushbu

$$A_r[g_1(\xi,0,x,y)] = \eta^m \frac{\partial g_1}{\partial \xi}\eta'(t) - \frac{\partial g_1}{\partial \xi}\xi'(t) = u_1\eta^{-1}(m+2)\,[(\xi - x)\frac{2}{m+2}\eta^{m+1}\eta'(t) -$$

$$-\frac{4\xi'(t)}{(m+2)^2}\eta^{\frac{m+2}{2}}\,(\eta^{\frac{m+2}{2}} - y^{\frac{m+2}{2}})] - u_1\frac{4}{m+2}\eta^{\frac{m}{2}}y^{\frac{m+2}{2}}\frac{h(x,y,t)}{r^2}$$

olamiz, bunda

$$u_1 = \frac{\beta k_1}{r_1^{2\beta+1}}F(\beta,\beta,2\beta,1-\rho),\, u_2 = \frac{\beta k_1}{r_1^{2\beta+1}}F(\beta,\beta,2\beta+1,1-\rho),$$

$$h(x,y,t) = 2(\xi - x)\frac{2\eta^{m+1}}{m+2}\eta'(t) + +\xi'(t)(\xi - x)^2 - \frac{4\xi'(t)}{(m+2)^2}\,(\eta^{m+2} - y^{m+2}).$$

Endi C_ε aylananing tenglamasini qutb koordinatalarda $\xi - x = \varepsilon\, cost$, $\eta - y = \varepsilon\, sint$ yozib olamiz. U holda $(y + \varepsilon sint)^{(m+2)/2} = y^{(m+2)/2}\,\varepsilon y^{m/2}\,sint + \alpha_1(y,t,\varepsilon)$ tenglikni inobatga olib va bir qator hisoblashlardan so'ng asosiy formulada $\varepsilon \to 0$ va $\delta \to 0$ da limitga o'tsak

$$u(x,y) = -\int_0^{2\pi} v\,(\xi)\,G_1\,(\xi,0,x,y)d\xi - \int_{\sigma_0} \varphi(S)A_S[G_1]\,ds$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula bilan aniqlangan $u(x,y)$ funksiyaning haqiqatan ham N masalaning yechimi ekanligiga bevosita tekshirib ko'rish bilan ishonch hosil qilish mumkin. Asosiy tenglama uchun chegaraviy masalaning echimining yagonaligi va mavjudligi yuqorida qayd qilib o'tilgan g'oya yordamida amalga oshiriladi.

T masalasining echimini mavjudligi yuqorida aytib o'tilgan usul yordamida amalga oshiriladi. YA'ni, elliptik va giperbolik qismdan keltirilgan echimlarning $x = 0$ dagi qiymati hisoblanib, ular tenglashtiriladi. Funksiyaning shu o'qdagi hosilasiga nisbatan singulyar integral tenglama olinadi. Singulyar integral tenglama regulyarizatsiya qilinib, Frelgolmning 2-tur tenglamasiga keltiriladi va uning echimi mavjudligidan o'rganilayotgan tenglamaning echimi mavjudligi haqida xulosa qilinadi.

Endi bitta va ikkita buzilish chizig'iga ega bo'lgan ayrim aralash tipdagi (sohaning bir qismida elliptik, bir qismida giperbolik tipga tegishli) tenglamalar uchun o'rganilgan chegaraviy masalalarni tahlil qilamiz.

R.T.Zunnunov va I.U.Xaydarovlarning maqolasida («Краевая задача со смещением для обобщенного уравнения Трикоми со спектралным параметром в неограниченной области» // Вестник КРАУНС. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 32. № 3. с.55-64.) quyidagi aralash turdagi tenglamani ko'rib chiqilgan:

$$signy|y|^m U_{xx} + U_{yy} - \lambda^2|y|^m u = 0, m = const > 0, \qquad (10)$$

$\Omega = \Omega_1 UAB U\Omega_2 -$ chegaralanmagan cheksiz soha, bu yerda

$$\Omega_1 = \{(x,y): -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\},$$

$$\text{AB} = \{(x,y): -1 < x < 1, y = 0\},$$

$\Omega_2 -$ sohasi $y < 0$ tekislikda joylashgan bo'lib, AB segment va xarakteristikalari bilan chegaralangan:

$$AC: x - \left[\frac{2}{\text{m+2}}\right](-y)^{\frac{(m+2)}{2}} = -1, \;\; BC: x + \left[\frac{2}{\text{m+2}}\right](-y)^{\frac{(m+2)}{2}} = 1,$$

$\lambda -$ haqiqiy son, $\lambda = \lambda_j (j = 1{,}2)$.

Quyidagi belgilashlar kiritiladi:

$l_1=\{(x,y):-\infty<x<-1, y=0\}$ $l_2=\{(x,y):1<x<+\infty, y=0\}$,

$\theta_{-1}(x)=\left(\frac{x-1}{2}-\left[\frac{m+2}{2}\cdot\frac{x+2}{2}\right]^{\frac{2}{m+2}}\right)$, $\theta_1(x)=\left(\frac{1+x}{2}-\left[\frac{m+2}{2}\cdot\frac{1-x}{2}\right]^{\frac{2}{m+2}}\right)$.

Ko'rinib turibdiki, $\theta_{-1}(x)$ va $\theta_1(x)$ $(x,0)\in AB$ nuqtadan chiquvchi (10) tenglama xarakteristikasining mos ravishda AC va BC xarakteristikalari bilan kesishish nuqtalaridir.

TD^{∞} masalasi. Quyidagi xossalarga ega $u(x,y)$ funsiyani toping:

1) $u(x,y)\in C(\Omega\cup l_0\cup l_1\cup l_2\cup\overline{AC}\cup\overline{BC})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2)$, $A(-1{,}0), B(1{,}0)$ nuqtalar yaqinida $y^m u_x(x,y), u_y(x,y)$ funksiyalari $1-2\beta$ dan kam tartibli cheksizlikka intilishi mumkin;

2) $\Omega_1$va Ω_2 sohalarda (10) tenglamani qanoatlantiradi;

3) Quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi:

$$u(x,0)=\psi_1(x), -\infty<x\le -1;\ u(x,0)=\psi_2(x), 1\le x<+\infty;$$
$$u(x,1)=\psi_3(x), -\infty<x<+\infty;$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,y)=0,$$

bu erda $y\in[0,1]$;

$$a(x)A_{-1x}^{1,\lambda_2,}\left\{D_{-1,x}^{\beta}(1+x)^{2\beta-1}[u(\theta_{-1}(x))]\right\}+$$
$$b(x)A_{-1x}^{1,\lambda_2,}\left\{D_{x1}^{\beta}(1-x)^{2\beta-1}[u(\theta_1(x))]\right\}=c(x)u(x,0)+d(x),$$

$-1\le x\le 1$, bu yerda $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, a(x), $b(x)$, $c(x)$, $d(x)-$ berilgan funksiyalar, $a^2(\mathrm{x})+b^2(\mathrm{x})\neq 0, -1\le x\le 1$.

(10) tenglama uchun ushbu masalani qo'yish va o'rganishda quyidagi integral operatorning xususiyatlaridan foydalanilgan:

$A_{sx}^{1,\lambda}[f(x)]\equiv f(x)-\int_s^x f(t)\left(\frac{t-s}{x-s}\right)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-s)(x-t)}\right]dt.$

O.A.Repinning («Нелокальная задача А.М.Нахушева для уравнения смешанного типа», Вестник Самарского государственного технического университета, сер. физико – математические науки. 2001 г., №13, с.5-9.) maqolasida quyidagi chegaraviy masala o'rganilgan:

$G_mU=signy|y|^mU_{xx}+U_{yy}=0,\quad m>0.$ (11)

$\Omega-$ sohasi yuqori yarim tekislikda, ya'ni $y>0$ da $x=0$ va $x=1$ lar, quyi yarim tekislikda esa $A(0{,}0)$ va $B(1{,}0)$ nuqtalaridan kelib chiqadigan (11) tenglamaning

AC: $\xi=x-\left[\frac{2}{m+2}\right](-y)^{\frac{(m+2)}{2}}=0$ $\quad BC$: $x+\left[\frac{2}{m+2}\right](-y)^{\frac{(m+2)}{2}}=1$

xarakteristikalari bilan chegaralangan.

Quyidagi belgilashlar kiritilgan: $\Omega_1$va Ω_2 mos ravishda Ω: $A_h=A_h(0,h)$, $B_h=B_h(0,h)$, $h>0$ sohaning elliptic va giperbolik qismlari Ω_{1_h} - to'rtburchakning ochiq uchlari A, A_h, B_h, B; $\Omega_h=\Omega_{1_h}\cup AB\cup\Omega_2$ $\theta_0(x)$ va $\theta_1(x)$ (11) tenglamaning AC va BC xarakteristikalarining $(x,0)$ nuqtadan chiquvchi affikslari, nuqta $I-$ bu $y=0$ to'g'ri chiziqdagi birlik kesma; $(D_{0+}^{\alpha}\varphi)(x)$, $(D_{1-}^{\alpha}\varphi)(x)-$ Riman-Liuvil ma'nosida kasr integro differensiallashning operatorlar.

Masala. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiyani toping: 1) $\Omega_1\cup\Omega_2$ sohada (10) tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni $G_mU\equiv 0$; 2) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\overline{\Omega}\setminus\overline{AB})\cap$

$C^2(\Omega \setminus AB)$; 3) $\lim_{y\to\infty} u_x(x,y) = 0$ teng $(x \in \bar{I})$; 4) $\lim_{y\to 0+0} u_x(x,y) = \lim_{y\to 0-0} u_y(x,y)$ $(x \in I)$; 5) $U(0,y) = \varphi_1(y), u(1,y) = \varphi_2(y)$ $0 \le y < \infty$; 6) $a(x)\left(D_{0+}^{1-\beta} u[\theta_0(t)]\right)(x) + b(x)\cdot$

$$\left(D_1^{1-\beta} u[\theta_1(t)]\right)(x) = c(x) - x^\beta b(x)\left(D_1^{1-\beta} u[\theta_1(t)]\right)(x),$$

$\forall x \in I$, bu yerda $\varphi_1(y), \varphi_2(y), a(x), b(x), c(x)$ berilgan funksiyalar, shuningdek ular quyidagi sinflarga tegishli: $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in [0,\infty)$, $y^{3m/4}\varphi_1(y), y^{3m/4}\,\varphi_2(y) \in L[0,\infty)$; $a(x), b(x), c(x), C\,(\bar{I}) \cap C^2(I)$, $(1-x)^\beta a(x) + x^\beta b(x) \neq 0$, $\forall x \in \bar{I}$, $\beta = m/(2m+4)$.

Berilgan funksiyalarga tegishli shartlar qo‘yilib, masalalarning yechimi mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

XULOSA

Ushbu maqolada keltirilgan chegaraviy masalani yechish g‘oyasi, [1-39] ilmiy izlanishlarda keng qo‘llanilgan bo‘lib, echimning yagonaligi va mavjudligini isbotlashda Eylerning gipergeometrik va gamma funksiyalari xossalari, karrali integrallar va kompleks analiz elementlaridan foydalanilgan.

Aytish joizki, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 07.05.2020 yildagi PQ-4708-sonli «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida» qarorinining ijrosini ta’minlash ishlari ham faollashib bormoqda. Qarorda berilgan ko‘rsatmalarning ijrosini ta’minlash borasida [40-57] ilmiy izlanishlar olib borilgan.

REFERENCES

1. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig’iga ega bo’lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo’yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
2. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
3. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырож-дающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
4. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
5. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
6. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), с. 6-9.
7. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
8. Мирсабуров М. Нелокальная краевая задача для вырождающегося эллип-тического уравнения // Дифференциальные уравнения, 38:1 (2002), 129–131.
9. Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках // Дифференциальные уравнения, 37:9, (2001), 1281-1284.

10. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
11. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
12. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), р.42-48.
13. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
14. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.
15. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig’iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta’lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g’oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.
16. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.
17. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. (2022) Ikkita buzilish chizig’iga ega kvazichiziqli elliptic tenglama uchun chegaraviy masala haqida // Central Asian Academic Journal Of Scientific Research, 2(5), 544-557 b.
18. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
19. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
20. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
21. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
22. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
23. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
24. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).

25. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
26. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
27. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
28. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
29. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
30. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
31. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish boʻyicha baʼzi uslubiy koʻrsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
32. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil taʼlimni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
33. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
34. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
35. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).
36. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенглама-лар системаларини ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:9 (2021), p.7-20.
37. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усул-ларни қўлланилиши ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.
38. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.
39. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.
40. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
41. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
42. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.

43. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.
44. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.
45. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.
46. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с не-прерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.
47. Расулов Х.Р., Ф.М. Джуракулова (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress. 2:1, 455-462 бетлар.
48. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
49. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века. 53:6-1, 2019. С.16-18.
50. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.
51. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.
52. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.
53. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).
54. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning to‘la o‘zgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).
55. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
56. Raupova, M. (2021). Роль математики в биологических науках. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
57. Raupova, M. (2021). Математические модели и законы в биологии. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).