SCIENCE AND INNOVATION
INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL VOLUME 1 ISSUE 8
UIF-2022: 8.2 | ISSN: 2181-3337

KVADRATIK FUNKSIYALAR SINFI UCHUN MAKSIMUM FUNKSIYASINI MINIMALLASHTIRISH MASALASI

Salim Otakulov
Fizika-matematika fanlari doktori, professor, Jizzax politexnika instituti
Nodir Tohir o'g'li Abduhamidov
O'zbekiston Milliy Universiteti Jizzax filiali Amaliy matematia fakulteti magistranti
https://doi.org/10.5281/zenodo.7445335

Annotatsiya. *Ushbu ishda kvadratik funksiyalar sinfi uchun maksimum funksiyasini minimallashtirish masalasi qaralgan. Ushbu minimaksli tipdagi optimallah masalasida yechimning mavjudligi va optimallik shartlari tadqiq etilgan. Maksimum funksiyasining bir qator xossalari o'rganilgan. Minimaks masalasi yechimining mavjudligi, yagonali sharlari hamda optimallikning zaruriy va yetarli sharlari olingan.*

Kalit so'zlar: *kvadratik funksiya,maksimum funksiyasi,minimaksli masala, yechim mavjudligi va yagonaligi, optimallik shartlari.*

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИИ ФУНКЦИИ МАКСИМУМА ДЛЯ КЛАССА КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. *В данной работе рассматривается задача минимизации функции максимума для класса квадратичных функций. В данной задаче оптимизации минимаксного типа исследованы вопросы существования решения и условия оптимальности. Изучены некоторые свойства функции максимума. Получены условия существования и единственности решения минимаксной задачи, а также необходимые и достаточные условия оптимальности.*

Ключевые слова: *квадратичная функция, функция максимума, минимаксная задача, существование и единственность решения, условия оптимальности.*

THE MINIMIZATION PROBLEM OF MAXIMUM FUNCTION FOR CLASS QUADRATIC FUNCTIONS

Abstract. *In the paper we consider the minimization problem of maximum function for class quadratic functions. In the optimization problem of minimax type the conditions of existence and optimality are researched. Some property of maximum function are studied. The conditions for existence, uniquely of solution and the necessary and sufficient conditions of optimality are obtained.*

Keywords: *quadratic function, maximum function, minimax problem, existence and uniquely of solution, conditions of optimality.*

KIRISH

Maksimum va minimumni, ya'ni o'zgaruvchi miqdorlarning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish haqidagi masalalar mumkin bo'lgan imkoniyatlar, varianlar orasidan muayyan mezon bo'ycha eng yaxshisini, mukammalini, boshqacha aytganda, optimalini aniqlashga to'g'ri keladigan juda ko'plab vaziyatlaeda paydo bo'ladi. Bunday masalalar matematikada ekstremal masalalar yoki optimallash masalalari deb ataladi [1,2,6,8]. Ekstremal masalalar nazariyasi hozirgi zamon matematikasida muhim o'rinni egallaydu va xilma-xil tatbiq sohalariga ega. Optimallash nazariyasining matematik dasturlash, optimal boshqaruv va optimal qaror qabul qilishning matematik usullari kabi bo'limlari ayniqsa katta amaliy ahamiyatga ega bo'lib, ular bugungi kunda har tomonlama jadal rivojlanmoqda [1–14].

Hozirgi vaqtda optimallashning matematik nazariyasi tirli yo‘nalishlarda olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-nazariy va amaliy tadqiqotlar uchun alohida qiziqishga ega. Optimallashtirish usullaridan na faqat matematiklar, balki mexaniklar, fiziklar, muhandis-konstruktorlar va loyihacilar, avtomatik boshqaruv tizimlarini ishlab chiquvchilar, operatsiyalar tadqiqi bilan shug‘ullanuvchi mutaxasislar, iqtisodchilar va boshqa yana ko‘plab amaliyotchi-mutaxasislar keng foydalanmoqdalar [5,7,9,10]. Optimallash usullari hozirgi zamom iqtisodiyoti, texnikasi, ishlab chiqarish va boshqaruvdagi dolzarb muammolarni hal etishga qaratilgan faol ilmiy tadqiqotlar natijasida turli yo‘nalishlarda rivojlanmqda.

Muhim tipdagi optimallash modellari iqtisodiy rejalashtirish va muhandislik loyihalarini tayyorlashda, tizimli tahlilda, texnika va ishlab chiqarishning turli boshqruv jarayonlarida paydo bo‘ladi. Bunday modellar orasida silliqmas maqsad funksionalli optimallash masalalari alohida sinfni tashkil etadi. Shuni ta’kidlash joizki, silliqmas optimallash masalalariga [11–15] olib keluvchi yondoshuvlardan biri qaror qabul qilishdagi minimaks(maksimin) tamyilidir [15]. Bu tamoyil noma’lum parametrlarning mumkin bo‘lgan eng noqulay realizatsiyasii hisobga olgan holda sifat mzonini optimallashga asoslangan. Minimas va maksiminning qo‘llanilishi tahlikali va ziddiyatli vaziyatlardagi o‘yin masalalarini hal etishda ham asosiy tamoyillardan biri hisoblanadi. Axborot to‘liqsizligi va boshlang‘ich ma’lumotlar noaniqligi sharoitida qaror qabul qilish muammolarining ahamiyati oshib borishi silliqmas optimallash matematik nazariyasining paydo bo‘lishi va rivojlanishiga, matematikada silliqmas va ko‘p qiymatli tahlilning bo‘limlarining shakllanishiga olib keldi [8, 11–15].

Maksimum va minimum tipidagi funksiyalar silliqmas funksiyalarning keng sifini tashkil etadi. Bunday tipdagi funksiyalarnng analitik xossalari ularning aniqlanishida baza bo‘lib xizmat qiluvchi funsiyalar sinfidan va cheklashlardan muhim bog‘liq bo‘ladi. Maksimum va minimum tipidagi funksiyalar va ulatning chiziqli kombinatsiyalari subdigfferensiallanuvchi va kvazidifferensiallanuvchi funksiyalar sinfiga tegishli [11–18]. Har bir silliqmas optimallah masalasini yechish usuli beilgan maqsad funksiyasining strukturaviy xossalari va chelkashlardan muhim darajad bog‘liq bo‘ladi. Yana shuni ham alohida ta’kidlash lozimki, silliqmas funksionallarni optimallash dinamik izimlarda trayektoriyalar ansamblini boshqarish masalalarida ham muhim va keng bir sinfni tashki etadi [19–29].

Ushbu ishda kvdratik funksiyalar sinfida aniqlangan maksimum funksiyasini biror yopiq to‘plamda minimallash masalasini tadqiq etamiz. Matematik dasturlashning maxsus tipdagi masalasi deb hisoblanadigan ushbu masala yechimi mavjudligi, yagonaligi va optimalik shartlarini o‘rganamis. Matematik dasturlash usullari optimallash bilan bog‘liq barcha tadqiqot sohalari uchun alohida ahamiyatga ega [2,3,6,8,9]. Matematik dasturlash ko‘p mezonli optimallashda, interval cheklashli ekstremal masalalarda ham muhim rol o‘ynaydi. Shu sababli ishda tadqiq etilgan masala o‘zining dolzarbligi bilan ajralib turadi.

TADQIQOT MATERIALLARI VA METODLARI

1. Kvadratik funksiyalar sinfida minimaksli masalaning qo‘yilishi.

Quyidagi kvadratik funksiyani qaraymiz:

$$f(x,u) = \frac{1}{2}(Ax,x) + (Bu,u) + (Cx,u), \qquad (1)$$

bu yerda $A-$ $n\times n$-o‘lchamli simmetrik matritsa, $B-$ $m\times m$-o‘lchamli matritsa, $C-$ $m\times n$-o‘lchamli matritsa. Faraz qilaylik, $U-$ R^m fazoning kompakt, yani chegaralangan va yopiq to‘plami bo‘lsin. Ushbu

$$\varphi(x)=\max_{u\in U} f(x,u)=\max_{u\in U}[\frac{1}{2}(Ax,x)+(Bu,u)+(Cx,u)]. \qquad (2)$$

ko‘rinshdagi funksiyaga (1) ko‘rinishdagi kvadratik funksyalatar sinfida aniqlangan maksimum funksiyasi deyiladi. (2) maksimum funksiyasini yopiq $\Omega\subseteq R^n$ to‘plamda minimallashdan iborat ushbu minimaksli masalani qaraymiz:

$$\max_{u\in U}[\frac{1}{2}(Ax,x)+(Bu,u)+(Cx,u)]\to \min,\ x\in\Omega. \qquad (3)$$

Qaralayotgan (3) masala matematik dasturlashning uzluksiz minimaksli masalalar deb ataluvchi sinfiga tegishli. Bu masalada maqsad funksiyasi silliqmas, ya’ni differensiallanmaydigan funksiyalar sifatida alohida qiziqish uyg‘otadi. Bu yerda (3) masalaning tadqiqi bilan shug‘ullanamiz. Tadqiqot maqsadi (2) maksimum funksiyasi xossalarini o‘rganish, minimaksli masalada yechimning mavjudligi, optimallikning zaruriy va yetrli sharlarini olishdan iborat. Minimaksli masalani o‘rganishda silliqmas va qavariq tahlil natijalaridan foydalanamiz.

2.Maksimum funksiyasining usluksisligi va qavariqligi.

Kvadratik funksiyalar sinfida berlgan maksimum funksiyaining muhim xossasi uning usluksizligidir.

1-lemma. Berilgan (2) maksimum funksiyasi R^n da uzluksiz bo‘ladi. Agar unda ixtiyoriy $x\in R^n$ uchun maksimum yagona $u(x)\in U$ nuqtada erishilsa, ya’ni

$$\varphi(x)=\max_{u\in U}[\frac{1}{2}(Ax,x)+(Bu,u)+(Cx,u)]=\frac{1}{2}(Ax,x)+(Bu(x),u(x))+(Cx,u(x))>$$

$$>\frac{1}{2}(Ax,x)+(B\tilde{u},\tilde{u})+(Cx,\tilde{u})\ \forall\tilde{u}\neq u(x),\tilde{u}\in U,$$

bo‘lsa, u holda $u=u(x)$ funksiya ham R^n da uzluksiz bo‘ladi.

Haqiqatan ham, (1) kvadratik funksiya (x,u) o‘zgaruvchilar bo‘yicha R^n va R^m fazolarning dekart ko‘paytmasi $R^n\times R^m$ da uzluksisdir. Shuning uchun $U-$ kompakt to‘plamligini hisobga osak, matematik tahlildan yaxshi ma’lum bo‘lgan Veyershtrass teoremasiga ko‘ra har bir $x\in R^n$ uchun shunday $u(x)\in U$ mavjudki, $\varphi(x)=\max_{u\in U} f(x,u)=f(x,u(x))$.

Ixtiyoriy $\bar{x}\in R^n$ nuqtani va unga yaqinlashuvchi ixytiyoriy $x^k\in R^n$ nuqtalar ketma-ketligini olamiz. Ravshanki, $\varphi(\bar{x})=f(\bar{x},u(\bar{x}))\geq f(\bar{x},u(x^k))$, $\varphi(x^k)=f(x^k,u(x^k))\geq f(x^k,u(\bar{x}))$.

Natijada,

$$f(x^k,u(\bar{x}))-f(\bar{x},u(\bar{x}))\leq\varphi(x^k)-\varphi(\bar{x})\leq f(x^k,u(x^k))-f(\bar{x},u(x^k)). \qquad (4)$$

U – kompakt to‘plam bo‘lganligi sababli $u(x^k)\in U$ nuqtalar ketma-ketlgidan biror $\bar{u}\in U$ nuqtaga yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Belgilashd soddalik maqsdida bu qismiy ketma-ketlik uchun avvalgi $\{u(x^k)\}$ belgilashni saqlagan holda $u(x^k)\to\bar{u}$, $k\to\infty$ deb hisoblaymiz. Endi $k\to\infty$ da (4) tengsisizliklarda limitga o‘tamiz va $f(x,u)$

funksiya uzluksizligiga ko‘ra $\varphi(x^k) \to \varphi(\bar{x})$, $k \to \infty$ munosabatni olamiz. Bu esa, (2) maksimum funksiyasining ixtiyoriy $\bar{x} \in R^n$ nuqtada uzluksizligini bildiradi.

Lemma tasdig‘ining ikkinchi qismi isbotiga o‘tamiz. Teskaridan faraz qilamiz, ya’ni (2) da maksimum har bir $x \in R^n$ uchun yagona $u(x) \in U$ nuqtada erishilsin, ammo $u = u(x)$ funksiya biror $\bar{x} \in R^n$ nuqtada uzilishga ega bo‘lsin. U vaqtda biror $x^k \to \bar{x} \in R^n$ ketma-ketlik uchun $u(x^k)$ ketma-ketlik limiti $u(\bar{x})$ ga teng emas: $u(x^k) \to \bar{u} \neq u(\bar{x})$, $k \to \infty$. Maksimum funksiyasining isbotlangan uzluksislgiga ko‘ra $\varphi(x^k) \to \varphi(\bar{x}) = f(\bar{x}, u(\bar{x}))$, $k \to \infty$. Ukkinchi tomondan, $f(x,u)$ kvadratik funksiya uzluksizligiga ko‘ra $\varphi(x^k) = f(x^k, u(x^k)) \to f(\bar{x}, \bar{u})$. Shunday qilib, $\varphi(\bar{x}) = f(\bar{x}, u(\bar{x})) = f(\bar{x}, \bar{u})$, $\bar{u} \neq u(\bar{x})$. Bu esa (2) ning o‘ng tomonida maksimum yagona nuqtada erishiladi degan shartga ziddir. Olingan qarama-qarshilk bizning farazimiz noto‘g‘riligini va $u = u(x)$ funksiyaning uzluksizligini ko‘rsatadi.

1-eslatma. Maksimum funksiyasining aniqlanishida (2) tenglik o‘ng tomonida maksimum yagona $u(x) \in U$ nuqtada erishilishini ta’minlaydigan shart sifatida B matritsaning manfiy aniqlanganlik($B < 0$), ya’ni $(Bu,u) < 0 \forall u \neq 0$ shartni ko‘rsatish mumkin. Bu holda (1) ko‘rinishdagi $f(x,u)$ kvadratik funksiya $u \in R^m$ bo‘yicha qat’iy botiq bo‘ladi. Qat’iy botiq $u \to f(x,u)$ funksiyaning qavariq va kompakt U to‘plamdagi maksimimi $u(x)$ mavjud va yagonadir.

Maksimum funsiyasining uzluksizligi kabi xossa minimum tipdagi

$$\psi(x) = \min_{u \in U}[\frac{1}{2}(Ax,x) + (Bu,u) + (Cx,u)] \tag{5}$$

funksiya uchun ham o‘rinli.

2-lemma. Berilgan (5) minimum funksiyasi R^n da uzluksiz bo‘ladi. Agar (5) ning o‘ng tomonida ixtiyoriy $x \in R^n$ uchun minimum yagona $u(x) \in U$ nuqtada erishilsa, u holda $u = u(x)$ funksiya ham R^n da uzluksiz bo‘ladi.

Agar A matritsa musbat ishorali bo‘lsa, u vaqtda qavariq tahlil natijalariga ko‘ra (1) ko‘rinishdagi $f(x,u)$ kvadratik funksiya $x \in R^n$ o‘zgaruvchi bo‘yicha har bir tayinlangan $u \in R^m$ da qavariq bo‘ladi, ya’ni ixtiyoriy $x \in R^n$, $y \in R^n$ va ixtiyoriy $\alpha \in [0,1]$ son uchun ushbu

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y, u) \leq \alpha f(x,u) + (1-\alpha) f(y,u)$$

tengsizlik o‘rinli. Bu yerdan

$$\max_{u \in U} f(\alpha x + (1-\alpha)y, u) \leq \alpha \max_{u \in U} f(x,u) + (1-\alpha) \max_{u \in U} f(y,u).$$

tengsizlikni olamiz. Bu esa ta’rifga ko‘ra (2) maksimum funksiyasining R^n da qavariqligini bildiradi. Bu munosabatlardan kelib chiqadiki, agar A matritsa musbat aniqlangan bo‘lsa, u vaqtda maksimum funksiyasi qat’iy qavariq bo‘ladi.

Shunday qilib, quyidagi tasdiq o‘rinli.

3-lemma. Faraz qilaylik, A matritsa musbat ishorali ($A \geq 0$), ya’ni $(Ax,x) \geq 0 \forall x \in R^n$ bo‘lsin. U vaqtda (2) masimum funksiyasi R^n da qavariq bo‘ladi. A matritsa musbat aniqlangan ($A > 0$), ya’ni. $(Ax,x) > 0 \forall x \neq 0$ bo‘lganda maksimum funksiyasi R^n da qat’iy qavariq bo‘ladi.

Quyidagi tasdiqda minimum funksiyasining botiqlik sharti berilgan.

4-lemma. Faraz qilaylik, A matritsa manfiy ishorali ($A \le 0$), ya'ni $(Ax,x) \le 0 \, \forall x \in R^n$ bo'lsin. U vaqtda (2.4) minimum funksiyasi R^n da botiq bo'ladi. A matritsa manfiy aniqlangan ($A < 0$), ya'ni. $(Ax,x) < 0 \, \forall x \ne 0$ bo'lganda esa minimum funksiyasi R^n da qat'iy botiq funksiya bo'ladi.

TADQIQOT NATIJALARI

1.Maksmum funksiyasi minimuminig mavjudligi. Kvadratik funksiyalar sinfida qo'yilgan (3) minimaksli masala yechimining mavjudligi muammosi bilan shug'ullanamiz.

1-teorema. Faraz qilaylik, A matritsa musbat aniqlangan ($A > 0$) bo'lsin. U vaqtda (3) minimaksli masala yechimi mavjud hamda Ω qavariq va yopiq to'plam bo'lganda yagonadir.

Isboti. Haqiqatan ham, agar A musbat aniqlangan bo'lsa, $m = \min\limits_{\|x\|=1}(Ax,x) > 0$

bo'ladi. Natijada, $(Ax,x) = \|x\|^2 (A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}) \ge m\|x\|^2$. Bundan tashqari $|(Cx,u)| \le \|x\| \max\limits_{u \in U} \|C'u\|$

tengsizlik ham o'rinli. Shularni hisobga olib,

$$f(x,u) = \frac{1}{2}(Ax,x) + (Bu,u) + (Cx,u) \ge m\frac{1}{2}\|x\|^2 - \|x\| \max_{u \in U}\|C'u\| + \min_{u \in U}(Bu,u)$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bundan kelib chiqadiki, $\varphi(x) = \max\limits_{u \in U} f(x,u) \to \infty$, $\|x\| \to \infty$.

Maksimum funksiyasining bu xossasidan har bir tayinlangan $x^0 \in \Omega$ uchun quriladigan uning $L(x^0) = \{x \in \Omega : \varphi(x) \le \varphi(x^0)\}$ sath to'plamining bo'sh emas va chegaralanganligi haqida xulosaga kelish mumkin. Maksimum funksiyasining uzluksizligidan va $\Omega \subseteq R^n$ to'plamning yopiqligidan esa $L(x^0)$ to'plamning yopiqligi ham kelib chqadi. Demak, $L(x^0)$ to'plam bo'sh emas va kompakt to'plamdir. U vaqtda, uzluksiz funksiyaning kompakt to'plamda aniq quyi chegarasiga erishishi haqidagi matemtik tahlildan yaxshi ma'lum Veyershtrass teoremasiga ko'ra shunday $x^* \in L(x^0)$ nuqta mavjudki, $\varphi(x^*) = \inf\limits_{x \in L(x^0)} \varphi(x)$ bo'ladi. $L(x^0)$ to'plam tuzilishidan tushunarliki, $\inf\limits_{x \in L(x^0)} \varphi(x) = \inf\limits_{x \in \Omega} \varphi(x)$. Demak, $\varphi(x^*) = \inf\limits_{x \in \Omega} \varphi(x)$, ya'ni maksimum funksiyasi Ω to'plamda aniq quyi chegarasiga erishadi. Shunday qilib, (3) minimakli masala yechimi mavjudligi isbotlandi. Yechimning yagonalgi esa A matritsaning musbat aniqlanganlik shartida maksimum funksiyasining qat'iy qavariqligidan va qat'iy qavariq funksiya minimumining qavariq to'plamda yagonaligidan kelib chiqadi.

2-teorema. Faraz qilaylik, A matritsa musbat ishorali($A \ge 0$) bo'lsin va

$$\min_{u \in U} \inf_{x \in \Omega}(Cx,u) > -\infty$$

shart bajarilsin. U vaqtda (3) minimaksli masalada minimallashtiruvchi har qanday ketma-ketlik, ya'ni $\lim\limits_{k \to \infty} \varphi(x^k) = \inf\limits_{x \in \Omega} \varphi(x)$ shartni qanoatlantiruvchi $\{x^k\} \subset \Omega$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketligi (3.1) masala yechimiga yaqinlashadi.

Isboti. A matritsa musbat ishorali bo'lgani uchun $(Ax,x) \ge 0 \; \forall x \in R^n$. U vaqtda $\min\limits_{u \in U} \inf\limits_{x \in \Omega}(Cx,u) > -\infty$ shartni hisobga olsak,

$$f(x,u)=\frac{1}{2}(Ax,x)+(Bu,u)+(Cx,u)\geq \min_{u\in U}(Bu,u)+\min_{u\in U}\inf_{x\in\Omega}(Cx,u)>-\infty \;\; \forall x\in\Omega, u\in\Omega,$$

ya'ni $\varphi(x)=\max_{u\in U} f(x,y)$ maksimum funksiyasi Ω to'plamda quyidan chegaralangan.

Demak, $\inf_{x\in\Omega}\varphi(x)>-\infty$. Shunig uchun maksimum funksiyasini minimallahtiruvchi $\{x^k\}\subset\Omega$ ketma-ketlik mavjud. Shu ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy ketma ketlik $\{x^{k_i}\}$ ajratilgan bo'lsin. U vaqtda, Ω to'plamning yopiqligga ko'ra $\lim_{i\to\infty} x^{k_i}=x^*\in\Omega$ va $\varphi(x)=\max_{u\in U} f(x,y)$ funksiyaning uzluksisligiga ko'ra $\inf_{x\in\Omega}\varphi(x)=\lim_{i\to\infty}\varphi(x^{k_i})=\varphi(x^*)$, ya'ni $\{x^{k_i}\}$ qismiy ketma-ketlik limiti (3) masala yechimi bo'ladi.

2. Minimaksli masalada optimallikning zaruriy va yetarli shartlari. Minimaksli masalani tadqiq etishda optimallikning zaruriy va yetarli shartlarini aniqlashtirish muhim ahamiyatga ega. Maksimum funksiyasi differensiallanuvchilik xossasiga ega bo'lmaganligi uchun optimallik shartlarini olishda bu xossadan foydalanib bo'lmaydi. Ammo maksimum funksiyasining yo'nalish bo'yicha differensiallanuvchilik xossasidan foydalanish mumkin.

Ta'rif. $\varphi(x)$ maksimum funksiyasining $x^0\in R^n$ nuqtadagi $g\in R^n$, $\|g\|=1$ vektor yo'nalishi bo'yicha hosilasi deb quyidagi

$$\frac{\partial\varphi(x^0)}{\partial g}=\lim_{\alpha\to 0+}\frac{\varphi(x^0+\alpha g)+\varphi(x^0)}{\alpha}.$$

chekli limitga aytiladi. Barcha $g\in R^n$, $\|g\|=1$ yo'nalishlar bo'yicha hosilaga ega funksiyaga yo'nalish bo'yicha differensiallanuvchi funksiya deb aytiladi.

3-teorema[30]. $\varphi(x)$ maksimum funsiyasi har bir $x\in R^n$ nuqtada ixtiyoriy $g\in R^n$, $\|g\|=1$, yo'nalish bo'yicha hosilaga ega va bu hosila uchun quyidagi formula o'rinli:

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial g}=\max_{u\in Z(x)}(Ax+C'u,g), \qquad (6)$$

bu yerda $Z(x^*)=\{u\in U: f(x^*,u)=\max_{v\in U} f(x^*,v)\}$.

2-eslatma. Kvadratik funksiyalar sinfida aniqlangan (2) maksimum fuksiyasi bilan bir qatorda (5) minimum funksiyasining yo'nalish bo'yicha hosilasi mavjud va bu hosila uchun

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial g}=\min_{u\in W(x)}\left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial x},g\right)=\min_{u\in W(x)}(Ax+C'u,g)$$

formula o'rinli, bu yerda $W(x)=\{u\in U:\ f(x,u)=\min_{v\in U} f(x,v)\}$.

4-teorema. Faraz qilaylik, (3) masalada $\Omega-$ qavariq va yopiq to'plam bo'lsin. Berilgan $x^*\in\Omega$ nuqtaning (3) minimaks masalasi yechimi bo'lishi uchun

$$\min_{x\in\Omega}\max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,x-x^*)=0. \qquad (7)$$

shartning bajarilishi zarur, A matritsa musbat ishorali bo'lgan holda esa yetarli hamdir.

Isboti. Zaruriylik. Aytayik, $x^*\in\Omega$ – (3) minimaks masalasi yechimi bo'lsin. (7) bajarilmaydi deb teskaridan faraz qilaylik. U vaqtda shunday $\tilde{x}\in\Omega$ nuqta topiladiki,

$$\max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,\tilde{x}-x^*)=\rho<0 \qquad (8)$$

bo‘ladi((7) tenglik chap tarafidagi ifoda musbat bo‘la olmaydi). Ravshanki, $\tilde{x} \neq x^*$. Quyidagi vektorni qaraymiz: $\tilde{g} = \dfrac{\tilde{x} - x^*}{\|\tilde{x} - x^*\|}$, $\|\tilde{g}\| = 1$. (2) maksimum funksiyasinin yo‘nalishlar bo‘yicha hosilasi ta’rifiga ko‘ra quyidagi

$$\varphi(x^* + \alpha\tilde{g}) = \varphi(x^*) + \alpha \frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial\tilde{g}} + o(\alpha) \tag{9}$$

tenglikni yoza olamiz. (6) va (7) formulalardan

$$\frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial\tilde{g}} = \frac{\rho}{\|\tilde{x} - x^*\|} \tag{10}$$

kelib chiqadi. $\dfrac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0, \alpha \to 0+$ ekanligini hisobga olsak, yetarlicha kichik $\alpha > 0$ sonlarda (8), (9) va (10) munosabatlar asosida

$$\varphi(x^* + \alpha\tilde{g}) \leq \varphi(x^*) + \frac{\alpha\rho}{2\|\tilde{x} - x^*\|} < \varphi(x^*) \tag{11}$$

tengsizlikga ega bo‘lamiz. Bu (11) tengsizlik esa $x^* \in \Omega$ nuqtaning maksimum funksiyasi uchun minimum nuqtasi ekanligiga qarama-qarshidir. Chunki Ω -qavariq to‘plam bo‘lganligidan barcha $\alpha \in [0, \|\tilde{x} - x^*\|]$ uchun $x^* + \alpha\tilde{g} \in \Omega$ bo‘ladi. Olingan ziddiyat (7) shartning maksimum funksiyasi minimum nuqtasi uchun zaruriyligini isbotlaydi.

Yetarlilik. Faraz qilaylik, A matritsa musbat ishorali bo‘lsin va $x^* \in \Omega$ nuqtada (7) shart bajarilsin. Shu $x^* \in \Omega$ nuqta (3) minimaks maalasi yechimi, ya’ni (2) maksimim funksiyasining global minimum nuqtasi bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Teskaridan faraz qilamiz. U vaqtda shunday $\bar{x} \in \Omega$ nuqta topiladiki,

$$\varphi(\bar{x}) < \varphi(x^*) \tag{12}$$

bo‘ladi. Ravshanki, $\bar{x} \neq x^*$. Quyidagi $\bar{g} = \dfrac{\bar{x} - x^*}{\|\bar{x} - x^*\|}$, $\|\bar{g}\| = 1$ vektorni qaraymiz va maksimum funksiyasining $x^* \in \Omega$ nuqrada shu vector yo‘nalishi bo‘yicha hosilasini, ya’ni

$$\frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial\bar{g}} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}[\varphi(x^* + \alpha\bar{g}) - \varphi(x^*)] \tag{13}$$

miqdorni hisoblaymiz. A matritsa musbat ishorali bo‘lganda (2) maksimum funksiyasi qavariq bo‘lganligi sababli barcha $\beta \in [0,1]$ sonlar uchun

$$\varphi(x^* + \beta(\bar{x} - x^*)) = \varphi(\beta\bar{x} + (1-\beta)x^*) \leq \beta\varphi(\bar{x}) + (1-\beta)\varphi(x^*) = \varphi(x^*) + \beta[\varphi(\bar{x}) - \varphi(x^*)]$$

munosabat bajariladi. Bu yerdan, $\alpha \in [0, \|\bar{x} - x^*\|]$ sonlar uchun

$$\frac{1}{\alpha}[\varphi(x^* + \alpha\bar{g})) - \varphi(x^*)] = \frac{1}{\alpha}[\varphi(x^* + \alpha\frac{\bar{x} - x^*}{\|\bar{x} - x^*\|}) - \varphi(x^*)] \leq \frac{1}{\|\bar{x} - x^*\|}[\varphi(\bar{x}) - \varphi(x^*)] \tag{14}$$

tengsizlikni olamiz. Shunday qilib, (12),(13) va (14) munosabatlardan

$$\frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial\overline{g}} \le \frac{1}{\left\|\overline{x}-x^*\right\|}[\varphi(\overline{x})-\varphi(x^*)]<0 \qquad (15)$$

kelib chiqadi. Maksium funksiyasi yo‘nalish bo‘yicha hosilasi uchun (6) formulaga ko‘ra

$$\frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial\overline{g}} = \max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,\frac{\overline{x}-x^*}{\left\|\overline{x}-x^*\right\|}) = \frac{1}{\left\|\overline{x}-x^*\right\|}\max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,\overline{x}-x^*).$$

Bundan va (15) dan $\max\limits_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,\overline{x}-x^*)<0$ tengsizlikni olamiz. Bu esa teorema sharti (8) ga ziddir. Olingan qarama-qarshilik (8) shartning maksimum funksiyasi minimum uchun yetarli ekanligini ham tasdiqlaydi. Teorema isbotlandi.

3-eslatma. (8) shart $\min\limits_{\substack{x\in\Omega \\ \left\|x-x^*\right\|\le 1}}\max\limits_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,x-x^*)=0$ shartga teng kuchlidir.

MUHOKAMA

Endi optimallik shartlarining joiz yo‘nalishlar konusi orqali ifodalanishi masalasiga to‘xtalamiz. Quyidagi to‘plamni qaraymiz: $\Gamma(x^*)=\{v\in R^n:\ v=\lambda(x-x^*),\lambda>0,x\in\Omega\}$, bu yerda $x^*\in\Omega$. Ushbu $\Gamma(x^*)$ to‘plam qavariq konusdan iborat. $\Gamma(x^*)$ konusning $\overline{\Gamma}(x^*)$ yopig‘iga $x^*\in\Omega$ nuqtadagi joiz yo‘nalishlar konusi deb aytiladi.

Quyidagi tasdiq o‘rinli: (7) munosabat quyidagi

$$\min_{\substack{g\in\overline{\Gamma}(x^*) \\ \left\|g\right\|=1}}\max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,g)\ge 0 \qquad (16)$$

tengsizlikga ekvivalentdir.

Dastlab (7) dan (16) kelib chiqishini ko‘rsatamiz. Teskaridan faraz qilamiz. Aytaylik, (7) bajarlsin-u, ammo (16) bajarilmasin. U vaqtda shunday $\tilde{g}\in\overline{\Gamma}(x^*)$,$\left\|\tilde{g}\right\|=1$ vektor mavjudki,

$$\max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,\tilde{g})=\gamma<0 \qquad (17)$$

bo‘ladi. $\overline{\Gamma}(x^*)$ konusning aniqlanishiga ko‘ra $\tilde{v}\in\Gamma(x^*)$ vector topiladiki,

$$\left|\max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,\tilde{g})-\max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,\tilde{v})\right|\le -\frac{1}{2}\gamma$$

bo‘ladi. Shuni e‘tiborga olasak, (17) asosida

$$\max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,\tilde{v})\le\frac{1}{2}\gamma<0 \qquad (18)$$

tengsizlikni olamiz. $\tilde{v}\in\Gamma(x^*)$ vektor $\tilde{v}=\tilde{\lambda}(\tilde{x}-x^*)$, $\tilde{\lambda}>0,\ \tilde{x}\in\Omega$ kabi ifodalanadi. Bundan va (18) dan $\max\limits_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,\tilde{x}-x^*)\le\frac{1}{2\tilde{\lambda}}\gamma<0$ kelib chiqadi. Bu esa (7) ga ziddir. Olingan qarama-qarshilik (7) dan (16) kelib chiqishini isbotlaydi.

Endi (16) dan (7) kelib chiqishini ko‘rsatamiz. Teskaridan faraz qilamiz/ U vaqtda shunday $\overline{x}\in\Omega$ nuqta topiladiki,

$$\max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,\overline{x}-x^*)=\eta<0 \qquad (19)$$

tengsizlik o‘rinlidir. Ravshanki, $\overline{x}\ne x^*$. Shuni hisobga olib, (19) dan quyidagi tengsizlikni olamiz:

$$\max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,\frac{\overline{x}-x^*}{\|\overline{x}-x^*\|})=\frac{1}{\|\overline{x}-x^*\|}\eta<0. \qquad (20)$$

Tushunarliki, $\overline{g}=\frac{\overline{x}-x^*}{\|\overline{x}-x^*\|}\in\Gamma(x^*)\subset\overline{\Gamma}(x^*)$ va $\|\overline{g}\|=1$. Shunig uchun olingan (20) tengsizlik (16) ga qarama-qarshidir. Bu ziddiyat (16) dan (7) kelib chiqishini tasdiqlaydi.

4-eslatma. Agar $\Omega=R^n$ bo‘lsa, $\overline{\Gamma}(x^*)=R^n$ bo‘ladi. Shuning uchun bu holda (16) optimallik sharti $\min_{\|g\|=1}\max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,g)\geq 0$ ko‘rinishda yoziladi.

XULOSA

Ishda (1) kvadratik funksiyalar sinfida aniqlangan (2) maksimum funksiyasini minimallashdan iborat (3) minimaksli masala tadqiq etildi. Usbu masalaning alohida belgisi undagi maqsad funksiyasinig silliqmasligidan iborat. Maksimum funksiyasining xossalariga asoslangan holda minimaksli masala yechiminig mavjudligi, yagonaligi va minimallashtiruvchi ketma-ketlikning yaqinlashish shartlari ko‘rsatildi. Maksimum funksiyasining yo‘nalishlar bo‘yicha differensiallanuvchiligi xossasidan foydalanib, minimaksli masalada optimallikning zaruriy va yetarli shartlari olindi. Bu shartlarning nazariy tadqiqi sifatida joiz yo‘nalishlar orqali ularning ifodalanishi ham muhokama etildi. Olingan natijalar qaralgan tipdagi minimaks masalasini yechishning sonly usuli va algorirmini ishlab chiqishda tatbiq etilishi mumkin.

REFERENCES

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. –М.: Наука, 1979.
2. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. –М.: Наука ,1982. - 432 с.
3. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М: Наука, 1988.
5. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. - СПб: Питер, 2000.
6. Карманов В. Г. Математическое программирование. –М.: Наука, 1986.
7. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. –М.: Мир, 1988.
8. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
9. Черноморов Г.А. Теория принятия решений. –Новочеркасск: 2002.
10. Малышев В.В. Методы оптимизации в задачах системного анализа и управления. М.: МАИ-ПРИНТ, 2010. - 440 с.
11. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. –М.: Наука, 1988.
12. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. –М.: Наука, 1972.
13. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
14. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука,1990.
15. Кейн В.М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. М.: Наука, 1982.

16. Отакулов С., Мусаев А.О. Применение свойства квазидифференцируемости функций типа минимума и максимума к задаче негладкой оптимизации.Colloqium-journal. Miedzynarodowe czasopismo naukowe. № 12(64), Warsawa(Polska), 2020. с. 55-60.
17. Отакулов С., Равшанов И.А. Свойства одного класса функций типа максимума и минимума и их применене к негладким задачам оптимизации. International scientific journal “Science and Innovation”, 2022, № 2. –p. 60-68.
18. Отакулов С., Хайдаров Т.Т. Условия оптимальности в негладкой задаче управления для динамической системы с параметром. Colloqium-journal. Miedzynarodowe czasopismo naukowe. № 13(66), 2020. -с. 18-22.
19. Otakulov S., Haydarov T.T., Sobirova G. D. On the time optimal control problem for controllable differential inclusion with parameter. Proceedings of Scholastico-2021, International Consortium on Academic Trends of Education and Science, April 2021. London, England. pp. 112-114.
20. Otakulov S., Rahimov B. Sh. On the structural properties of the reachability set of a differential inclusion. Proceedings of International Conference on Research Innovations in Multidisciplinary Sciences, March 2021. New York, USA. pp. 150-153.
21. Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. Lambert Academic Publishing, 2019.
22. Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. Time optimal control problem of ensemble trajectories of differential inclusion with delays. Journal of Advanced Research in dynamical and Control Systems, vol.12, issue 6, 2020. -p. 1043-1050.
23. Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. About the conditions of optimality in the minimax problem for controlling differential inclusion with delay. Academica: An International Multidisciplinary Research Jounal,Vol.10, Issue 4, 2020. pp. 685–694.
24. Отакулов С., Холиярова Ф.Х. Задача управления по быстродействию ансамбля траекторий дифференциального включения с запаздыванием. Academic Research in Educational Sciences. vol.2, issue 3, 2021. -p. 778-788.
25. Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. On The Problem of Controllability an Ensemble of Trajectories for One Information Model of Dynamic Systems with Delay. International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT-2020). Tashkent, 4-6 November, 2020. Publiser: IEEE. -p.1-4.
26. Otakulov S., Rahimov B. Sh., Haydarov T.T. The nonsmoth optimal control problem for ensamble of trajectories of dynamic system under conditions of indeterminacy. Middle European Scientific Bulletin, vol. 5, 2020. -p. 38-42.
27. Отакулов С., Рахимов Б.Ш. Хайдаров Т.Т. Задача оптимизации квадратичной функции на неограниченном многогранном множестве.Science and Education. vol.1, Issue 2, 2020. -p.11-18.
28. Otakulov S., Musayev A. O., Abdiyeva H.S. Application the mathematical methods in the problem of decision making under informational constraints. Proceedings of Scholastico-2021, International Consortium on Academic Trends of Education and Science, April 2021. London, England. -p. 105-107.
29. Отакулов С., Жуманов К.С. Негладкая задача оптимального управления для линейной модели динамических систем // Science and innovation. -№ 3,series A, 2022. - pp. 252-259.

30. Отакулов С., Абдухамидов Н.Т. О непрерывной минимаксной задаче для класса квадратичных функций. // Science and innovation. -№ 3,series A, 2022. - pp. 103-113.