SCIENCE AND INNOVATION
INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL VOLUME 1 ISSUE 7
UIF-2022: 8.2 | ISSN: 2181-3337

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ФЕЙНМАНА

Шахобиддинова Зардила Баходиржон қизи
Ассистент Национальный исследовательский университет «ТИИИМСХ»

https://doi.org/10.5281/zenodo.7311197

Аннотация. *В статье рассматривается способ вычисления интегралов от функций, относящихся к классу функций, неинтегрируемых традиционным способом, с помощью метода Фейнмана, которое позволяет получить точное аналитическое решение. Приведены конкретные решения примеров. В работе применен метод для вычисления некоторых довольно сложных интегралов, которые невозможно проинтегрировать стандартным способом. А также в данной статье вычисляется интеграл Дирихле двумя способами, несобственный интеграл и определенный интеграл.*

Ключевые слова: *несобственные интегралы, определенный интеграл, трюк Фейнмана, интеграл Дирихле, дифференцирование интеграла по параметру, формула Лейбница.*

INTEGRATION OF FUNCTIONS: THE FEYNMAN METHOD

Abstract. *In this paper we will learn method of calculating integrals from using the Feynman method, which allows us to obtain an accurate analytical solution. Specific solutions of the examples are given. After reviewing the necessary theory, we will proceed to work through some examples and also in this article we will compute improper integral, definite integral and the Dirichlet integral in two technique.*

Keywords: *improper integrals, definite integral, Feynman trick, Dirichlet integral, Leibniz formula, differentiation under the integral sign.*

ВВЕДЕНИЕ

Интеграл и интегрирование являются неотъемлемыми и последовательными элементами исследования разных величин и некоторых функций. Интегрирование связано с важными способами анализа и исследования числовых функций - средними, предельными, бесконечно малыми, бесконечно большими величинами, пределами, дифференциалами, производными и так далее, а потому без осознания и исследования этих понятий невозможно исследование функций. Для нахождения значения интеграла такие ученые, как Ричард Фейнман, находили нетрадиционные способы.

Некоторые интегралы, которые относятся к классу функций, неинтегрируемых стандартными способами, можно вычислить с помощью метода, который создал лауреат Нобелевской премии (1965) Ричард Фейнман.

Физик, создатель направления квантовой теории поля-квантовой электродинамики (КЭД), интеллектуал, философ - Ричард Фейман разработал метод интегрирования под названием трюк Фейнмана. На его счету достижения из области теоретической физики, разработка метода интегрирования по траекториям из квантовой механики, реформация методов преподавания в высших учебных заведениях.

В автобиографической книге «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!» он пишет: «Оказывается, что дифференцирование интеграла по параметру не особо учат в университетах, и там этой операции не уделяют должного внимания. Но я научился использовать этот метод. Снова и снова применял этот новый инструмент. Так что, будучи самоучкой и учившись по книге, которую мне дал учитель физики, я знал особые методы интегрирования. Ребята, которые учились в университете Принстона мучились с каким-нибудь интегралом, это происходило потому, что они не могли вычислить его с помощью стандартных методов, которые узнали в школе. Потом приходил я и пытался продифференцировать это выражение под знаком интеграла; часто мне это удавалось. Вот так я завоевал репутацию человека, умеющего брать сложные интегралы, только потому, что мой набор инструментов отличался от всех других, а все другие приглашали меня, только перепробовав все свои инструменты» [1]. Интегрирование функций - до сегодняшнего времени является математическим искусством. Вычислять их интересно особенно когда в решении применяются нестандартные методы.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Рассмотрим интеграл

$$I(\alpha)=\int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx$$

где α - это параметр интеграла, x - переменная интегрирования.

Вычислим производную от I по α согласно определения производной:

$$\frac{dI}{d\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}.$$

Производная нашего интеграла будет выглядеть следующим образом:

$$I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)=\int\limits_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int\limits_{a}^{b} f(x,\alpha)dx=\left(\int\limits_{a+\Delta a}^{a}+\int\limits_{a}^{b}+\int\limits_{b}^{b+\Delta b}\right)f(x,a+\Delta\alpha)dx-$$

$$-\int\limits_{a}^{b} f(x,\alpha)dx=\int\limits_{a}^{b}\left\{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)\right\}dx+\int\limits_{b}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx-\int\limits_{a}^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx.$$

Так как $\Delta\alpha\to 0$, мы имеем $\Delta b\to 0$ тогда

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\left\{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)\right\}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int\limits_{a}^{b}\left\{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)\right\}dx+f(b,a)\Delta b-f(a,a)\Delta a,$$

где два последних члена получаются такими, потому что при $\Delta a\to 0$ и $\Delta b\to 0$ значение переменной x в интервале интегрирования практически не отличается от $x=a$ или $x=b$, соответственно. Таким образом

$$\frac{dI}{d\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int\limits_{a}^{b}\left\{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)\right\}dx+f(b,a)\frac{\Delta b}{\Delta a}-f(a,a)\frac{\Delta a}{\Delta a},$$

или перенося $\dfrac{1}{\Delta a}$ внутрь интеграла, получим

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int\limits_{a}^{b}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx+f(b,a)\frac{\partial b}{\partial a}-f(a,a)\frac{\partial a}{\partial\alpha}.\ (*)$$

Это полная формула Лейбница [2] для дифференцирования интеграла, включая случай, когда подынтегральное выражение и пределы являются функциями параметра α. Если пределы не являются функциями параметра (например, когда пределы являются константами), то последние два члена исчезают, и мы просто дифференцируем (находим частную производную) подынтегральное выражение под знаком интеграла по параметру α (не x).

Формула Лейбница –это отправная точка *трюка Фейнмана.*

РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе вычислим известный интеграл Дирихле двумя способами, а также несколько несобственных и определенных интегралов с помощью трюка Феймана.

Пример 1. Рассмотрим несобственный интеграл, (интеграл Дирихле)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx \, ... (1)$$

Решение. Для вычисления точного значения несобственного интеграла рассмотрим график подынтегральной функции при $a = 5$, $f(x) = \frac{\sin 5x}{x}$ (рис.1).

Затем, что функция четная и график симметричен относительно оси Oy В точке $x = 0$ функция $f(x) = \frac{\sin 5x}{x}$ не определена, но ее пределы справа и слева от этой точки существуют и в данном случае они равны 5, то есть это устранимая точка разрыва.

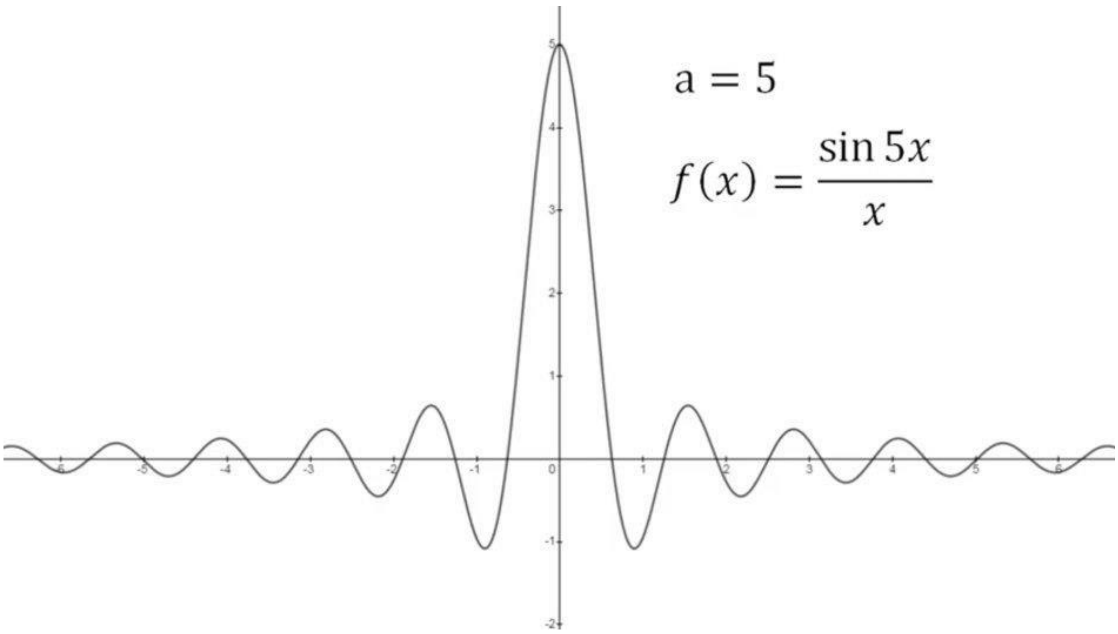

рис.1.

Несобственный интеграл равен площади под графиком этой функции. Заметим, что площадь, лежащая выше оси Ox мы берем со знаком плюс, а ниже оси со знаком минус (рис.2).

ОБСУЖДЕНИЕ

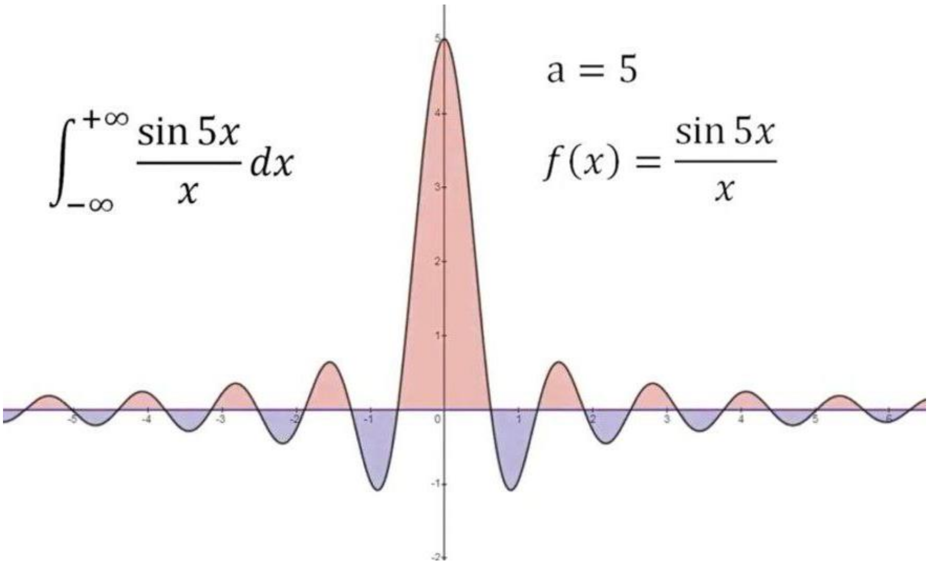

рис.2.

При уменьшении параметра a график функции $f(x) = \frac{\sin ax}{x}$ будет растягиваться вдоль оси Ox и при a=0 получим горизонтальную прямую совпадающую с осью Ox (рис.3).

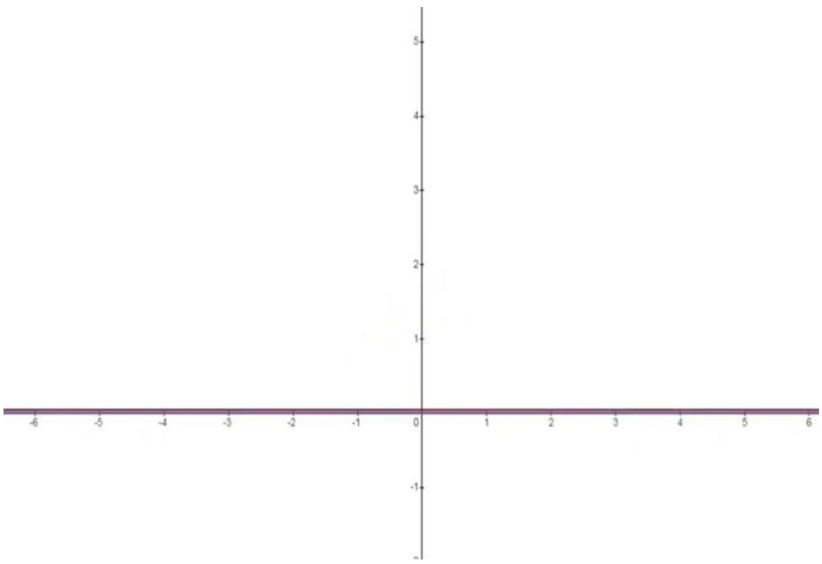

рис.3.

Перейдем к основной задаче: вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$. Рассмотрим интеграл (1) при $a > 0$. Поэтому такой интеграл по симметричному интервалу будет равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx. \quad (2)$$

Чтоб вычислить правую часть равенства (2), найдем функцию $\frac{1}{x}$ в виде $\int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$, где $a > 0, a = \text{const}$. Тогда из равенства (2) получим

$$2\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = 2\int_{-\infty} \sin ax\ (\int_0^\infty e^{-xt}dt)dx = 2\int_{-\infty} \sin ax\ dx \cdot \cdot \int_{-\infty} e^{-xt}dt = 2\int_0^\infty dt\ \int_0^\infty \sin ax\ e^{-xt}dx$$

С целью вычислить $\int_0^\infty \sin ax\ e^{-xt}dx$, воспользуемся формулой Эйлера

$$\sin ax = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}\ . \quad (3)$$

Тогда

$$\int_0^\infty \sin ax\ e^{-xt}dx = \int_0^\infty \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}\ e^{-xt}dx = 2\int_0^\infty dt\ \int_0^\infty \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} e^{-xt}dx = \frac{2a}{i}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + a^2} = \pi$$

В итоге, при любом значении $a > 0$, получим

$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \pi$, тогда $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

Теперь вычислим тот же интеграл (1), по методу Фейнмана. Тем самым покажем мощность “фирменного” метода Фейнмана.

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ax}{x}dx.$$

Решение [3]. Пусть функция $I(y)$ определена формулой $I(y) = \int_{-\infty}^\infty e^{-xy}\frac{\sin ax}{x}dx,\ y > 0,$ где $a = const$. Дифференцируя по параметру y, здесь x - это фиктивная переменная интегрирования, получим

$$\frac{dI}{dy} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-xy}\frac{\sin ax}{x}\right]dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-xy}\frac{\sin ax}{x}\right]dx = \int_{-\infty}^\infty -xe^{-xy}\frac{\sin ax}{x}dx = \int_{-\infty}^\infty -e^{-xy}\sin ax\ dx$$

Дважды интегрируя последний интеграл по частям, нетрудно показать, что $\frac{\mathrm{dI}}{dy} = \frac{-a}{a^2 + y^2}$. После интегрирования получим $I(y) = C - arctg(\frac{y}{a})$, где C – произвольная константа интегрирования. Мы можем вычислить C, заметив, что $I(\infty) = 0$ в исходном интегральном определении g(y), потому что множитель e^{-xy} в подынтегральном выражении стремится к нулю всюду при $y \to \infty$ (потому что на всем интервале интегрирования $x \geq 0$). Таким образом, $0 = C - arctg(\pm\infty)$, где мы используем знак плюс, если $a > 0$, и знак минус, если $a < 0$. Итак, $C = \pm\frac{\pi}{2}$, и мы имеем

$$I(y) = \pm\frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{y}{a}\right)$$

При y=0 (и поэтому $arctg(\frac{y}{a}) = 0$) дает нам следующий замечательный результат, называемый разрывным интегралом Дирихле. В конечном итоге мы видим, что в обоих случаях результат один и тот же:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \text{ если } a > 0 \\ 0, \quad \text{если} \quad a = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Пример 3. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{\cos x + 2}{2}\right)\frac{dx}{\cos x} \qquad (4)$$

Решение. Подинтегральная функция является непрерывной во всех точках отрезка $[0;\pi]$, кроме точки $x = \frac{\pi}{2}$. В этой точке мы имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$,то есть при

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} cos\frac{\pi}{2} = 0 \\ \ln\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2} + 2}{2}\right) = \ln 1 = 0 \end{cases}$$

Преобразуем подынтегральное выражение следующим образом:

$$\int_0^\pi \ln\left(\frac{\cos x + 2}{2}\right)\frac{dx}{\cos x} = \int_0^\pi \ln\left(1 + \frac{1}{2}\cos x\right)\frac{dx}{\cos x} \qquad (5)$$

В последнем интеграле коэффициент $\frac{1}{2}$ обозначим как параметр p. При разном значении параметра p будут получаться разные значения интеграла. Напишем интеграл в общем виде:

$$I(p) = \int_0^\pi \ln(1 + p\cos x)\frac{dx}{\cos x} \qquad (6)$$

Таким образом, мы можем сказать, что этот интеграл задает функцию по переменной p. В равенстве (6) имеет смысл рассматривать только p при $-1 \le p \le 1$. Только при таких значениях p аргумент натурального логарифма больше нуля во всех точках отрезка интегрирования. Значит исходный интеграл (5) будет предствлять из себя частный случай интеграла (6) при $p = \frac{1}{2}$. Теперь берем производную по параметру p:

$$I'(p) = \frac{\partial}{\partial p}\int_0^{\pi} \ln(1 + p\cos x)\frac{dx}{\cos x}$$

Здесь пределы интегрирования не зависят от переменной p. Частная производная от подынтегральной функции по переменной p будет непрерывной функцией. Поэтому мы можем внести дифференциал под знак интеграла и вычислить его. При интегрировании

$$I'(p) = \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\ln(1 + p\cos x)}{\cos x}\right)dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{(1 + p\cos x)}\frac{(1 + p\cos x)'_p}{\cos x}dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{(1 + p\cos x)}dx$$

Используем универсальный метод интегрирования. Пусть $t = tg\frac{x}{2}$, тогда $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$. При замене нужно поменять в интеграле пределы интегрирования. Если $x = 0$, то $t = 0$, если $x = \pi$, то $x = \pi$ тогда $t = \frac{\pi}{2}$ в этом случае $t = \frac{\pi}{2} \to +\infty, t \to \infty$. Тогда

$$I'(p) = \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\ln(1 + p\cos x)}{\cos x}\right)dx = \int_0^{\pi} \frac{2}{(1 + p + (1 - p)tg^2\frac{x}{2})2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{1 - p^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - p^2}}$$

аким образом, $I'(p) = \frac{\pi}{\sqrt{1 - p^2}}$. Тогда для нахождения решения интегрируем по переменной p.

$$I(p) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1 - p^2}}dp = \pi \arcsin p + C$$

Тогда $I(p) = \int_0^{\pi} \ln(1 + p\cos x)\frac{dx}{\cos x} = \pi \arcsin p + C$ (7)

Отсюдого находим $C = const$, так как от него зависит ответ. Тогда значение интеграла при $p = 0$ равно $I(0) = \int_0^{\pi} \ln(1 + 0 * \cos x)\frac{dx}{\cos x} = 0$

Аналогично в правой части равенства (7) получим значение $C=0$ при $p=0$. Постановка задачи было в том, что нужно вычислить частный случай интеграла (6) при $p=\frac{1}{2}$. Если $I(p)=\int_0^{\pi}\ln(1+p\cos x)\frac{dx}{\cos x}=\pi\arcsin p$.

Тогда $I(\frac{1}{2})=\int_0^{\pi}\ln(1+\frac{1}{2}\cos x)\frac{dx}{\cos x}=\pi\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Пример 4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 \frac{arctg\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (8)$$

Решение. График данной функции $f(x)=\frac{arctg\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$ выглядит следующим образом.

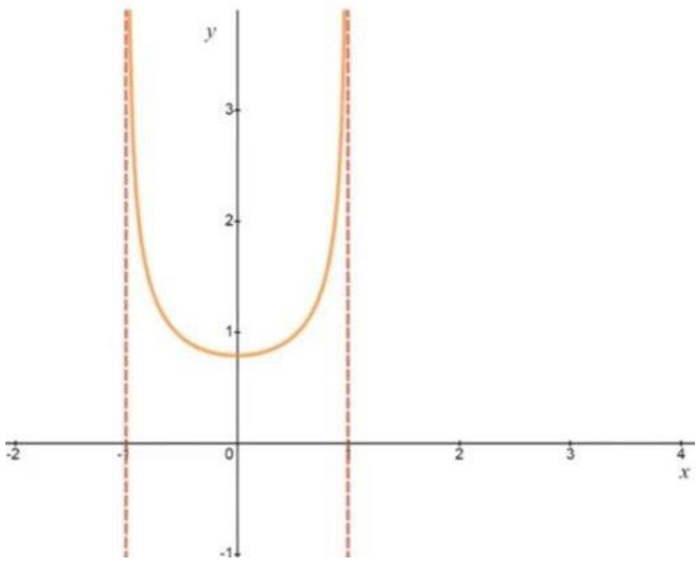

рис.3

Заметим, что подынтегральная функция стремится к бесконечности, когда при $x\to 1-0$

Упростим подынтегральное выражение, делая следующую замену: $x=\sin t$ и границы будет иметь следующий вид $x=0\Rightarrow t=0, x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

И видим, что в первой четверти $\sin t>0$ и $cost>0$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{arctg\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{arctg\left(cost\right)dt}{\cos t} \qquad (9)$$

Теперь воспользуемся методом Фейнмана следующим образом.

$$I(p)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arctg(p\cos t)dt}{\cos t} \quad (10)$$

Из (9) видно,что параметр $p=1$. В данном случае нашей целью является вычисление интеграла при $p=1$, если известно, что $I(0)=0$. Дифференцируя по параметру p получим:

$$I'(p)=\frac{\partial}{\partial p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{arctg(p\cos t)dt}{\cos t}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+p^2}}$$

Тогда

$$I(p)=\int\frac{\pi}{2\sqrt{1+p^2}}dp=\frac{\pi}{2}\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)+C$$

Известно, что $I(0)=0$, тогда константа $C=0$. Тогда

$$\int_0^1\frac{arctg\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right).$$

ВЫВОДЫ

Интегрирование функций - является математическим искусством. Вычислять их интересно особенно когда в решении применяются нестандартные методы. В работе применен метод Фейнмана для вычисления некоторых довольно сложных интегралов, которые невозможно проинтегрировать стандартным способом.

REFERENCES

1. R. Feynman "Surely You're Joking, Mr. Feynman!", Bantam edition,1985, c.400
2. S. Frederick Woods, Advanced Calculus: A Course Arranged with Special Reference to the Needs of Students of Applied Mathematics, 1934, c.404
3. G. Boros and V. Moll, Irresistible Integrals: Symbolics, Analysis and Experiments in the Evaluation of Integrals, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, c.299
4. Rudin, W., “Principles of Mathematical Analysis,” United States: McGraw Hill, 1976, c 352**5.** **5.** Б.П. Демидович - Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Москва, Астрель 2005, с. 561