УДК: 519.652

ОБ ОДНОЙ ВЕСОВОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО ПОРЯДКУ СХОДИ-МОСТИ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p^{(m)}(K_n)$

Беҳзод Ражабович Абдуллаев
ассистент кафедры «математика и естественных наук» Бухарского института управления природными ресурсами ТИИИМСХНИУ
Комил Ҳамидович Кобилов
ассистент кафедры «Прикладной математики и технологии программирование» Бухарского государственного университета

https://doi.org/10.5281/zenodo.7295162

Аннотация. *В настоящей работе обсуждается асимптотическая оптимальность одной весовой кубатурной формулы в пространстве* $L_p^{(m)}(K_n)$.

Ключевые слова: *оптимальная кубатурная формула, пространство Соболева, кубатурная формула.*

ABOUT ONE WEIGHT OPTIMAL IN THE ORDER OF CONVERGENCE CUBATURE FORMULA IN SPACE $L_p^{(m)}(K_n)$

Abstract. *In this paper, we discuss the asymptotic optimality of one weighted cubature formula in the space .*

Keywords: *optimal cubature formula, Sobolev space, cubature formula.*

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим кубатурную формулу вида

$$\int_{K_n} p(x) f(x) dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right) \qquad (1)$$

над пространством Соболева $L_p^{(m)}(K_n)$, где K_n – n-мерный единичный куб.

МУТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Обобщённая функция

$$\ell_N(x) = p(x)\varepsilon_{K_n}(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right) \qquad (2)$$

называется *функционалом погрешности* кубатурной формулы (1),

$$<\ell_N(x), f(x)>= \int_{K_n} p(x) f(x) dx - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right)$$

является погрешностью кубатурной формулы (1), $p(x) \in L_p(K_n)$ весовая функция, $\varepsilon_{K_n}(x)$ - характеристическая функция K_n, c_λ и $x^{(\lambda)}$ - *коэффициенты* и *узлы* кубатурной формулы (1) и $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Определение. *Пространство* $L_p^{(m)}(K_n)$ *- определяется как пространство функций заданных на* n*-мерном единичном кубе* K_n *и имеющие все обобщённые производные порядка* m*, суммируемые со степенью* p *в норме (см. [1])*

$$\left\| f(x) / L_p^{(m)}(K_n) \right\| = \left\{ \int_{K_n} \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left[D^{|\alpha|} f(x) \right]^2 \right\}^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

(3)

где $D^{|\alpha|} = \dfrac{\partial^m}{dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \ldots dx_n^{\alpha_n}}$, $\quad |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \ \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!.$

Справедлива следующая

Лемма. *Если для функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) выполняется условие Декартовых произведений, т.е.*

$$\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \otimes \ell_{N_2}(x_2) \otimes \ldots \otimes \ell_{N_n}(x_n)$$

и

$$\left\| \ell_{N_i}(x_i) / L_p^{(m_i)*}(0,1) \right\| \le d_i \frac{1}{N_i^{m_i}}, \quad d_i \text{ - константы,}$$

(4)

т.е.

$$\left\| \ell_{N_i}(x_i) / L_p^{(m_i)*}(0,1) \right\| \le d_i O\left(h^{m_i}\right), \qquad d_i \text{ - константы, } \left(i = \overline{1,n}\right), \quad (5)$$

то

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \le d \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} N_i^{m_i}}, \quad d \text{ - константа,}$$

(6)

или

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \le d \cdot O\left(h^m\right),$$

где $\ell_{N_i}(x_i) = p(x_i) \varepsilon_{k_i}(x_i) - \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} c_{\lambda_i} \delta\left(x_i - x_i^{(\lambda_i)}\right), d = \prod_{i=1}^{n} d_i$ и

$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n.$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Доказательство ведем методом математической индукции.

Пусть $n=2$, тогда $x=(x_1,x_2)$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$, $m=m_1+m_2$, $dx=dx_1dx_2$, $f(x)=f(x_1,x_2)$, $p(x)=p(x_1,x_2)$ и $\ell_N(x)=\ell_{N_1}(x_1)\otimes\ell_{N_2}(x_2)$.

Так как в дальнейшем мы будем использовать норму функции в одномерном случае то (3) при $n=1$ принимает следующий вид.

$$\left\| f(x_i)/L_p^{(m_i)*}(0,1)\right\| = \left\{\int_0^1 \left[\frac{d^{m_i}}{dx_i^{m_i}} f(x_i)\right]^p dx_i\right\}^{\frac{1}{p}},\quad i=1,2,...,n. \tag{7}$$

Таким образом, имеем

$$\left|<\ell_N(x_1,x_2), f(x_1,x_2)>\right| = \left|<\ell_{N_2}(x_2), <\ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2)>>\right| \le$$

$$\le \left\|\ell_{N_2}(x_2)/L_p^{(m_2)*}(0,1)\right\|\cdot\left\|<\ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2)>/L_p^{(m_2)}(0,1)\right\|, \tag{8}$$

Вычислим следующую норму

$$\left\|<\ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2)>/L_p^{(m_2)}(0,1)\right\| =$$

$$=\left\{\int_0^1 \left|\frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}}<\ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2)>\right|^p dx_2\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$=\left\{\int_0^1 \left|<\ell_{N_1}(x_1), \frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} f(x_1,x_2)\right|^p dx_2\right\}^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le\left\{\int_0^1 \left[\left\|\ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\|\cdot\left\|\frac{d^{m_2}}{dx_2^{m_2}} f(x_1,x_2)/L_p^{(m_1)}(0,1)\right\|\right]^p dx_2\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$=\left\|\ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\|\cdot\left\{\int_0^1\left\{\int_0^1\left[\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}} f(x_1,x_2)\right]^p dx_1\right\}dx_2\right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= d'\left\|\ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\|\cdot\left\|f(x)/L_p^{(m)}(K_2)\right\|, \tag{9}$$

где d' - константа.

Таким образом, из (8) и (9) получим:

$$\left|<\ell_N(x_1,x_2), f(x_1,x_2)>\right| \le$$

$$\le d'\left\|\ell_{N_2}(x_2)/L_p^{(m_2)*}(0,1)\right\|\cdot\left\|\ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\|\cdot\left\|f(x)/L_p^{(m)}(K_2)\right\|,$$

(10)

Из (10), пользуясь определением нормы, получим

$$\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)^*}(K_2)\right\|\le d'\left\|\ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\|\cdot\left\|\ell_{N_2}(x_2)/L_p^{(m_2)*}(0,1)\right\|,$$

(11)

Учитывая (4), на основании (11), имеем

$$\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)^*}(K_2)\right\|\le d'\cdot d_1\cdot d_2\frac{1}{N_1^{m_1}N_2^{m_2}}$$

т.е.

$$\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_2)\right\|\le d_3 O\left(h^{m_1}\right)O\left(h^{m_2}\right), \qquad (12)$$

где $d_3=d'\cdot d_1\cdot d_2$.

Пусть теперь неравенство (6) справедливо при $n=k$, тогда на основании приведенных выше вычислений, получим

$$\left|<\ell_N(x), f(x)>\right|=\left|<\ell_N(x_1,x_2,...,x_k), f(x_1,x_2,...,x_k)>\right|=$$

$$=\left|<\ell_{N_k}(x_k),<\ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}),...,<\ell_{N_2}(x_2),<\ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2,..,x_k)>>...>>\right|\le$$

$$\le\left\|\ell_{N_k}^{(x_k)}/L_p^{(m_k)*}(0,1)\right\|\cdot\left\|\ell_{N_{k-1}}(x_{k-1})/L_p^{(m_{k-1})*}(0,1)\right\|\cdot...$$

$$...\cdot\left\|<\ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2,...,x_k)>/L_p^{(m_1)}(0,1)\right\|\le$$

$$\le d''\left\|\ell_{N_k}(x_k)/L_p^{(m_k)*}(0,1)\right\|\cdot...\cdot\left\|\ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(x_1)\right\|\cdot\left\|f(x)/L_p^{(m)}(K_k)\right\|,$$

(13)

где d'' - константа.

ОБСУЖДЕНИЕ

Из (13), используя определение нормы функционала, будем иметь

$$\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_k)\right\|\le d''\left\|\ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\|\cdot...\cdot\left\|\ell_{N_k}(x_k)/L_p^{(m_k)*}(0,1)\right\|.$$

(14)

Тогда, с помощью (4) неравенство (14) приводим к виду

$$\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_k)\right\|\le d''\cdot d\frac{1}{N_1^{m_1}\cdot N_2^{m_2}...N_k^{m_k}}$$

или

$$\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)^*}(K_k)\right\|\le d''\cdot d\, O\left(h^{m_1}\right)...O\left(h^{m_k}\right),$$

где $d=\prod_{i=1}^{k}d_i$.

Используя справедливость утверждения леммы при $n=k$ докажем, что утверждение выполняется при $n=k+1$.Учитывая (13) при $n=k+1$ оценим погрешность кубатурной формулы вида (1)

$$\left|<\ell_{N_{k+1}}(x_1,x_2,...,x_{k+1}),f(x_1,x_2,...,x_{k+1})>\right|=$$

$$\left|<\ell_{N_1}(x_1),<\ell_{N_2}(x_2),<...<\ell_{N_k}(x_k),<\ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}),f(x_1,x_2,..,x_{k+1})>>...>>>\right|\le$$

$$\le\left\|\ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\|\cdot...\cdot\left\|\ell_{N_k}(x)/L_p^{(m_k)*}(0,1)\right\|\times$$

$$\times\left\|<\ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}),f(x_1,x_2,...,x_{k+1})>/L_p^{(m_{k+1})}(0,1)\right\|. \qquad (15)$$

Отсюда, как и выше, пользуясь определением нормы функционала, получим

$$\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_{k+1})\right\|\le d''\left\|\ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1)\right\|\cdot...$$

$$...\cdot\left\|\ell_{N_k}(x_k)/L_p^{(m_k)*}(0,1)\right\|\cdot\left\|\ell_{N_{k+1}}(x_{k+1})/L_p^{(m_{k+1})*}(0,1)\right\|. \qquad (16)$$

Из неравенств (4) и (16) имеем:

$$\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_{k+1})\right\|\le d'''\cdot d\cdot\frac{1}{N_1^{m_1}\cdot N_2^{m_2}...N_{k+1}^{m_{k+1}}} \qquad (17)$$

или

$$\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_{k+1})\right\|\le d'''\cdot d\cdot O\left(h^{m_1}\right)...O\left(h^{m_{k+1}}\right),$$

где $d=\prod_{i=1}^{k+1}d_i$.

Обобщая полученные результаты, в заключение отметим, что

$$\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_n)\right\|\le d\cdot\frac{1}{N_1^{m_1}\cdot N_2^{m_2}...N_n^{m_n}} \qquad (18)$$

или учитывая (5), из (17) будем иметь

$$\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_n)\right\|\le C\cdot O\left(h^{m_1}\right)...O\left(h^{m_n}\right),$$

т.е. $\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_n)\right\|\le C\cdot O\left(h^m\right)$, где $C=d'\cdot d''\cdot d'''\cdot\prod_{i=1}^{n}d_i$.

Лемма доказана.

ВЫВОДЫ

С помощью этой леммы легко доказывается следующая теорема.

Теорема. *Весовая кубатурная формула (1) с функционалом погрешности (2) при* $N_1=N_2=...=N_n$, $\prod_{i=1}^{n}N_i=N$ *и* $m_1+m_2+...+m_n=m$ *является оптимальной по порядку сходимости над пространством* $L_p^{(m)}(K_n)$, *т.е. для нормы функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) имеет место равенство*

$$\left\|\ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_n)\right\|=O\left(N^{-\frac{m}{n}}\right).$$

Доказательство.

На основе леммы при $N_1 = N_2 = \ldots = N_n$ имеем $N_i = \sqrt[n]{N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Итак,

$$\prod_{i=1}^{n} N_i^{m_i} = N_1^{m_1+m_2+\ldots+m_n} = N^{\frac{m}{n}}. \qquad (19)$$

Подставляя (19) в неравенство (18) получим

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \le C \cdot N^{-\frac{m}{n}}, \qquad (20)$$

Из теоремы Н.С.Бахвалова[3] и неравенство (20) следует доказательство сформулированной теоремы.

REFERENCES

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974 – 808с.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Наука. 1988, - 333с.
3. Бахвалов Н.С.С Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной, Мат. заметки, 1972, т.2. №6, -С.655 – 664.