УДК: 519.652

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА НОРМА ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ $\overline{L}_2^m(K_n)$

Беҳзод Ражабович Абдуллаев
ассистент кафедры «математика и естественных наук» Бухарского института управления природными ресурсами ТИИИМСХНИУ
Комил Ҳамидович Кобилов
ассистент кафедры «Прикладной математики и технологии программирование» Бухарского государственного университета

https://doi.org/10.5281/zenodo.7295130

Аннотация. *В настоящей работе получена верхняя оценка норма функционала погрешности кубатурных формул в пространстве* $\overline{L}_2^m(K_n)$.

Ключевые слова: *оптимальная кубатурная формула, пространство Соболева, кубатурная формула.*

UPPER BOUND FOR THE NORM OF THE ERRORS FUNCTIONAL OF CUBA FORMULA IN SPACE

Abstract. *In the present work, an upper estimate for the norm of the error functional of cubature formulas in the space is obtained.*

Keywords: optimal cubature formula, Sobolev space, cubature formula.

ВВЕДЕНИЕ

Современная постановка проблемы оптимизации формул приближённого интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах, например [1] – [4].

В этих работах исследуется проблема оптимальности относительно некоторого определённого пространства. Большинство из них рассмотрены в пространстве Соболева [1].

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В настоящей работе рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_{K_n} f(x)dx \approx \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda f\left(x^{(\lambda)}\right) \tag{1}$$

над пространством $\overline{L}_2^{(m)}(K_n)$,

где K_n - n - мерный единичный куб.

Кубатурной формулы (1) сопоставим обобщённую функцию

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{K_n}(x) - \sum_{\lambda=1}^{N} c_\lambda \delta\left(x - x^{(\lambda)}\right), \tag{2}$$

и назовём её функционалом погрешности.

Определение. Пространства $\overline{L}_2^{(m)}\left(K_n\right)$ - определяется как пространство функций заданных на n - мерном единичном кубе K_n и имеющих обобщённые производные порядка m, суммируемые с квадратом в норме

$$\left\| f\left(x\right)/\overline{L}_2^{(m)}\left(K_n\right)\right\| = \left\{ \int\limits_{K_n} \left(\frac{\partial^m f\left(x\right)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} ... \partial x^{m_n}} \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

со скалярным произведением

$$\left(f\left(x\right), \varphi\left(x\right)\right) \overline{L}_2^{(m)}\left(K_n\right) = \int\limits_{K_n} \left(\frac{\partial^m f\left(x\right)}{\partial x^m} \right) \left(\frac{\partial^m \varphi\left(x\right)}{\partial x^m} \right) dx,$$

где $\partial x^m = \partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} ... \partial x_n^{m_n}$ $m = m_1 + m_2 + ...m_n$, $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$.

Как известно [1], что норма функции в пространстве $L_2^{(m)}\left(K_n\right)$ - определяется формулой:

$$\left\| f\left(x\right)/\overline{L}_2^{(m)}\left(K_n\right)\right\| = \left\{ \int\limits_{K_n} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(D^{|\alpha|} f\left(x\right)\right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ...\alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot ...\alpha_n!$ и $D^{|\alpha|} f\left(x\right) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f\left(x_1, ..., x_n\right)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Пусть в (4) положим $n = 2$ и $m = 2$, тогда отсюда получим, что

$$\int\limits_{K_\alpha} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(\frac{\partial^m f\left(x\right)}{\partial x^m} \right)^2 dx = \int\limits_{K_2} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=2} \frac{2!}{\alpha! \alpha_2!} \left(\frac{\partial^2 f\left(x\right)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right)^2 dx =$$

$$= \int\limits_{K_2} \left[\left(\frac{\partial^2 f\left(x\right)}{\partial x_2^2} \right)^2 + \frac{2!}{1! \cdot 1!} \left(\frac{\partial^2 f\left(x\right)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f\left(x\right)}{\partial x_1^2} \right)^2 dx \right].$$

(5)

При $n = 2$ и $m = 2$ равенство (3) принимает следующий вид

$$\left\| f\left(x\right)/\overline{L}_2^{(2)}\left(K_n\right)\right\|^2 = \int\limits_{K_2} \left(\frac{\partial^2 f\left(x\right)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} \right)^2 dx. \quad (6)$$

Очевидно, что для правая часть (6) меньше вычислений чем (5) и отсюда следует, что для нормы функции в пространстве $\overline{L}_2^{(m)}\left(K_2\right)$ количество вычислительных операций будет гораздо меньше чем в пространстве $L_2^{(2)}\left(K_2\right)$, так как в норме (6) участвует только смешенные производные.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Теперь докажем следующую теорему который является основным результатом.

Теорема. Если для функционала погрешности (2) весовой кубатурной формулы (1) над пространством $\overline{L}_2^{(m)}\left(K_n\right)$ выполняется условие

$$\ell_N\left(x\right)=\ell_{N_1}\left(x_1\right)\cdot\ell_{N_2}\left(x_2\right)\cdot\ldots\cdot\ell_{N_n}\left(x_n\right)$$

и

$$\left\|\ell_{N_i}\left(x_i\right)/\overline{L}_2^{(m_i)}\left(0,1\right)\right\|\le c_i\frac{1}{N_i^{m_i}},\quad c_i-\text{ константы,}$$

(7)

т.е.

$$\left\|\ell_{N_i}\left(x_i\right)/\overline{L}_2^{(m_i)^*}\left(0,1\right)\right\|\le c_iO\left(h^{m_i}\right),\quad c_i-\text{ константы,}\left(i=1,\overline{n}\right),\tag{8}$$

то

$$\left\|\ell_N\left(x\right)/\overline{L}_2^{(m)^*}\left(K_n\right)\right\|\le c\cdot\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}N_i^{m_i}},\ c-\text{константа,}\tag{9}$$

или

$$\left\|\ell_N\left(x\right)/\overline{L}_2^{(m)^*}\left(K_n\right)\right\|\le c\cdot O\left(h^m\right)\tag{10}$$

где $\ell_{N_i}\left(x_i\right)=\varepsilon_{K_i}\left(x_i\right)-\sum\limits_{\lambda_i=1}^{N_i}c_{\lambda_i}\delta\left(x_i-x_i^{(\lambda_i)}\right)$

$c=\prod\limits_{i=1}^{n}c_i,\qquad m=m_1+m_2+\ldots+m_n$ и m_i - произвольны $\left(i=\overline{1,n}\right)$ т.е. $0\le m_i\le m$

Доказательство ведём методом математической индукции.

Пусть $n=2,$ тогда

$x=\left(x_1,x_2\right),\quad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2,\quad m=m_1+m_2,\quad dx=dx_1dx_2,\quad f\left(x\right)=f\left(x_1,x_2\right),$ $\ell_N\left(x\right)=\ell_{N_1}\left(x_1\right)\cdot\ell_{N_2}\left(x_2\right).$

Если полагать в (3) $n=1$ то, получим

$$\left\|f\left(x_i\right)/\overline{L}_2^{(m_i)}\left(0,1\right)\right\|=\left\{\int\limits_0^1\left(\frac{\partial^{m_i}f\left(x_i\right)}{\partial x_i^{m_i}}\right)^2dx_i\right\}^{\frac{1}{2}},\quad\left(i=\overline{1,n}\right).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}&\left|<\ell_N\left(x_1,x_2\right),f\left(x_1x_2\right)>\right|=\left|<\ell_{N_2}\left(x_1\right),f\left(x_1,x_2\right)>\right|\le\\&\left\|\ell_{N_2}\left(x_2\right)/\overline{L}_2^{(m_2)^*}\left(0,1\right)\right\|\cdot\left\|<\ell_{N_1}\left(x_1\right),f\left(x_1,x_2\right)>/\overline{L}_2^{(m_2)^*}\left(0,1\right)\right\|\end{aligned}\tag{11}$$

Вычислим следующую норму:

$$\left\| <\ell_{N_1}(x_1), f(x_1.x_2)> / L_2^{(m_2)}(0,1) \right\| = \left\{ \int_0^1 \left| \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} <\ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2)> \right|^2 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \int_0^1 \left| <\ell_{N_1}(x_1), \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} f(x_1,x_2)> \right|^2 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left\{ \int_0^1 \left[\left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} f(x_1,x_2) / \overline{L}_2^{(m_1)}(0,1) \right\| \right]^2 dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\{ \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left[\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2}} f(x_1,x_2) \right]^2 dx_1 \right\} dx_2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x) / \overline{L}_2^{(m)}(K_2) \right\|, \text{ где } x = (x_1, x_2) \text{ и } m = m_1 + m_2 .$$

(12)

Таким образом, из (11) и (12) получим

$$\left| <\ell_N(x_1,x_2), f(x_1,x_2)> \right| \le \left\| \ell_{N_2}(x_2) / \overline{L}_2^{(m_2)^*}(0,1) \right\| \cdot$$

$$\cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x) / \overline{L}_2^{(m)}(K_2) \right\|,$$

(13)

Имея в виду (3) из (13) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_2) \right\| \le \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_2}(x_2) / \overline{L}_2^{(m_2)^*}(0,1) \right\|,$$

(14)

Учитывая (7) из (14) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_2) \right\| \le d_1 \cdot d_2 \cdot \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2}}$$

т.е.

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_2) \right\| \le d_3 O\left(h^{m_1}\right) \cdot O\left(h^{m_2}\right),$$

(15)

где $d_3 = d_1 \cdot d_2$

При $n = k$ имеем [6]

$$\left| <\ell_N(x), f(x)> \right| = \left| <\ell_N(x_1,x_2,...,x_k), f(x_1,x_2,...,x_n)> \right| =$$

$$\left| <\ell_{N_k}(x_k), <\ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}), ... <\ell_{N_2}(x_2), <\ell_{N_1}(x_1), f(x_1,x_2,...,x_k)>,...,> \right| \le$$

$$\leq \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k-1}}(x_{k-1}) / \overline{L}_2^{(m_{k-1})^*}(0,1) \right\| \ldots$$

$$\cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2, \ldots, x_k) / \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \ldots \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m_1)^*}(x_1) \right\| . \left\| f(x) / \overline{L}_2^{(m)}(K_k) \right\| .$$

(16)

Из (16) учитывая (3) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_k) \right\| \leq \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \ldots \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\|$$

(17)

Тогда имея в виду (7) из (17) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_k) \right\| \leq d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \ldots N_k^{m_k}}$$

(18)

или учитывая (8) из (18) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_k) \right\| \leq d \cdot O\left(h^{m_1}\right) \ldots O\left(h^{m_k}\right), \qquad \text{где } d = \prod_{i=1}^{k} d_i$$

ОБСУЖДЕНИЕ

Используя из справедливость утверждения теорема при $n = k$ докажем, что утверждение выполняется при $n = k + 1$.

Таким образом, пусть $n = k + 1$, тогда учитывая (3) из (17) имеем

$$\left| < \ell_{N_{k+1}}(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}), f(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) > \right| =$$

$$= \left| < \ell_{N_1}(x_1), < \ell_{N_2}(x_2), <, \ldots < \ell_{N_k}(x_k), < \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}), f(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) > \ldots > \right| \leq$$

$$\leq \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m_1)^*}(0,1) \right\| \ldots \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \cdot$$

$$\left\| < \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}), f(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) > / \overline{L}_2^{(m_{k+1})}(0,1) \right\|$$

(19)

Имея в виду (3) и (17) из (19) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_{k+1}) \right\| \leq \left\| \ell_{N_1}(x_1) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \ldots$$

$$\cdot \left\| \ell_{N_k}(x_k) / \overline{L}_2^{(m_k)^*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}) / \overline{L}_2^{(m_{k+1})^*}(0,1) \right\|,$$

(20)

Используя (7) из (20) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_{k+1}) \right\| \leq d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \ldots N_{k+1}^{m_{k+1}}},$$

(21)

или учитывая (15) и (21) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_{k+1}) \right\| \le d \cdot O\left(h^{m_1}\right) \ldots O\left(h^{m_{k+1}}\right), \qquad \text{где } d = \prod_{i=1}^{k+1} d_i .$$

В заключение отметим, что таким образом получим неравенство (9) и (10), т.е.

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \ldots N_n^{m_n}}, \qquad d - \text{константа.}$$

(22)

Или учитывая (8) из (22) имеем

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \cdot O\left(h^{m_1}\right) \ldots O\left(h^{m_n}\right)$$

(23)

где $d = \prod_{i=1}^{n} d_i$.

Так как $O\left(h^{m_1}\right) \ldots O\left(h^{m_n}\right) = O\left(h^{m_1+m_2+\ldots+m_n}\right) = O\left(h^{m}\right)$, то из (23) получим

$$\left\| \ell_N(x) / \overline{L}_2^{(m)^*}(K_n) \right\| \le d \cdot O\left(h^{m}\right), \qquad d - \text{константа,}$$

(24)

что и требовалось доказать.

ВЫВОДЫ

Таким образом мы получили оценку сверху для нормы функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) в пространстве $\overline{L}_2^{(m)^*}(K_n)$.

REFERENCES

1. Соболев С.Л., Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. – 808с.
2. Салихов Г.Н., Кубатурные формулы для многомерных сфер. Ташкент: Фан, 1985 – 104 с.
3. Шарипов Т.Х. Некоторые вопросы теории приближенного интегрирования кандидатская диссертация. Ташкент 1975 – 102с.
4. Шодиметов Х.М. Решетчатые квадратурные и кубатурные формулы в пространствах С.Л.Соболева. Докторская диссертация. Ташкент 202. - 218с.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы, т.1,М, Наука, 1973.