XUSUSIY HOSILALI GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN BOSHLANG‘ICH VA CHEGARAVIY MASALALAR HAQIDA

Qodirova Shaxnoza Ural qizi
Termez davlat universiteti magistri
https://doi.org/10.5281/zenodo.7295087

Annotasiya. *Maqolada yuqori va ikkinchi tartibli matematik fizika tenglamalarining tasnifi to‘liq bayon qilingan. Xususiy hosilali giperbolik tipdagi tenglamalar uchun qo‘yiladigan boshlang‘ich va chegaraviy masalalar tahlil qilingan. Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun Koshi, Darbu va Gursa masalalari tizimli tartibda berilgan. Bir nechta tipik ko‘rinishdagi masalalar yechib ko‘rsatilgan.*

Kalit so‘zlar: *matematik modellar, tenglama, giperbolik tip, elliptic tip, parabolic tip, aralash tip, chegaraviy masala, singulyar integral tenglama, integrallar nazariyasi, Trikomi masalasi, matematik biologiya, affin almashtirishlar, vektor, xarakteristik determinant, kompleks o‘zgaruvchili funksiya.*

О НАЧАЛЬНЫХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Аннотация. *В статье подробно описана классификация уравнений математической физики высшего и второго порядка. Анализируются начальные и краевые задачи для уравнений с частными производными гиперболического типа. Системно изложена задачи Коши, Дарбу и Гурсы для уравнений гиперболического типа. Указаны решения несколько типичных задач.*

Ключевые слова: *математические модели, уравнение, гиперболический тип, эллиптический тип, параболический тип, смешанный тип, краевая задача, сингулярное интегральное уравнение, теория интегралов, задача Трикоми, математическая биология, аффинные замены, вектор, характеристический определитель, функция комплексной переменной.*

ON THE INITIAL AND BOUNDARY BORDER PROBLEMS FOR EQUATIONS OF THE HYPERBOLIC TYPE WITH PARTICULAR DERIVATIVES

Abstract. *The classification of higher and second-order mathematical physics equations is fully described in the article. The initial and boundary problems for hyperbolic type equations with specific derivatives are analyzed. Cauchy, Darbou, and Gursa problems for hyperbolic type equations are given systematically. Several typical-looking problems are solved.*

Keywords: *mathematical models, equation, hyperbolic type, elliptic type, parabolic type, mixed type, boundary value problem, singular integral equation, theory of integrals, Tricomi problem, mathematical biology, affine substitutions, vector, characteristic determinant, complex variable function.*

KIRISH

Ma’lumki, bir qator fizik, mexanik, biologik va kimyoviy jarayonlarning matematik modellari matematik fizikaning tenglamalari orqali ifodalanadi. O‘z navbatida matematik fizika tenglamalarini echish turli tipdagi integral tenglamalarga olib kelinadi. Jarayonlarni matematik modelini tuzish, ya’ni matematik fizikaning tenglamalar nazariyasini ishlab chiqishning birinchi bosqichida ularning umumiy yechimini topishdan ko‘ra ko’p kuch sarflanadi. Dalamber J. (1747 yil) to'lqin tenglamasining umumiy yechimini topgan. Eyler L. (1770 yil) qo‘llagan almashtirishlarga asoslanib, Laplas P. (1773 yil) «Kaskad usuli» ni taklif qilgan. Boshqa ba'zi bir chiziqli bir xil ikkinchi tartibli giperbolik tenglamalarning ikkitasi bilan umumiy yechimini beradi.

Biroq, bunday umumiy yechim juda kam hollarda topilgan: oddiy differensial tenglamalardan farqli o'laroq, xususiy hosilali differentsial tenglamalar uchun umumiy yechimni juda oddiy formula shaklida olish mumkin bo'lgan birorta ham muhim tenglamalar sinfi ajratilmagan. Fizik jarayonlarni tahlil qilishda matematik fizika tenglamalari odatda qo'shimcha shartlar bilan oʻrganiladi. Ularning xususiyati yechimni oʻrganish yoʻnalishiga tubdan ta'sir qiladi.

Masalani algebraik (odatda chiziqli) tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladigan chegaraviy masalalarni taxminiy yechish usullari keng tarqalgan. Shu bilan birga, tizimdagi noma'lumlar sonini ko'paytirish orqali har qanday darajadagi yaqinlashish aniqligiga erishish mumkin. Shu bilan bir qatorda buzilish chizigʻiga ega giperbolik va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar nazariyasi hozirgi vaqtda xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining muhim tarmoqlaridan biri hisoblanadi. Aralash tipdagi tenglamalar bilan singulyar integral tenglamalar (aralash tipdagi tinglamalarni echish singulyar integral tenglamalarga olib kelinadi. Singulyar integral tenglamalar esa Karleman-Vekua usuli yordamida Fredgol'm integral tenglamalari yoki sistemalariga keltirilib, echimning mavjudligi isbotlanadi) nazariyasidagi masalalar, integral o'zgarishlar nazariyasi va maxsus funksiyalar o'rtasidagi to'g'ridan-to'g'ri bog'lanishlar, shuningdek, mexanika va matematik fizikaning bunday tenglamalarga keltiruvchi amaliy muammolari bilan bog'liq (Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегралные уравнения. Москва, «Наука», 1968 г., 513 с.). Bu nazariyaning asoslari Trikomi F. va Gellershtedt S. asarlarida yoritilgan (Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. – М. –Л.: Гостехиздат, 1947. – 192 с., Gellerstedt S. Quelques problems mixtes pour i'equation $y^m Z_{xx} + Z_{yy} = 0$ // Arkiv f. Math. Astr.OchFysik, 1938.-26 A., №.3.).

Tekislikda siqilgan muhitning transonik (tovush tezligidan yuqori tezlikda) oqimi muammolari, qobiqlarning momentsiz nazariyasi aralash tipdagi tenglamalar bilan tavsiflanadi. Ular uchun Trikomi masalasi ham, uning matematik umumlashmalarining amaliy tadbiqlari mavjud. So'nggi yillarda buzilish chizigʻiga ega giperbolik va aralash turdagi tenglamalar uchun siljish bilan bog'liq muammolarni o'rganish ayniqsa jadal olib borilmoqda. Ushbu tadqiqotlarning dolzarbligi matematik fizika tenglamalari uchun klassik muammolarni nazariy umumlashtirishning ichki ehtiyojlari bilan ham, qo'llaniladigan qiymat bilan ham aytish mumkin. Chunki ular gaz dinamikasi, issiqlik o'tkazuvchanligi nazariyasi, elastiklik nazariyasi, qobiqlar nazariyasi, plazma nazariyasi, matematik biologiya va mexanikaning boshqa ko'plab masalalari bilan bog'liq. Lokal boʻlmagan muammolar neft qatlamlarini matematik modellashtirishda, yer osti suvlarini filtrlashda, murakkab tuzilishga ega boʻlgan ob'yektda issiqlik va massa almashinuvida, simlardagi elektr tebranishlarida, gʻovak muhit bilan oʻralgan kanalda suyuqlik harakatida va boshqa hodisalarda uchraydi. Aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal masalalar etarlicha chuqur oʻrganilgan.

TADQIQOT MATERIALLARI VA METODOLOGIYASI

Endi umumiy holda berilgan yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning tasniflarini keltiramiz. Xususiy hosilali *m*-tartibli kvachiziqli tenglama

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)D^\alpha u + F(x, u, \dots D^\beta u, \dots) = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishida yoziladi, bu yerda F ifoda noma’lum $u = u(x)$ funksiyaning $m - 1$ dan yuqori bo‘lgan hosilalarini o‘z ichiga olmaydi. (1) tenglamaga mos bo‘lgan xarakteristik shakl

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \lambda^\alpha \qquad (2)$$

ko‘rinishida yoziladi.

Agar tenglama qaralayotgan D sohaning tayin x nuqtasida $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ o‘zgaruvchilarning shunday $\lambda_1 = \lambda_1\,(\mu_1, \dots, \mu_n)$, $i = 1, \dots, n$ affin almashtirilishini (affin almashtirish maxsus bo‘lmagan $\lambda = A\mu + B$ ($\det A \neq 0, B \in E^n$) almashtirishdan iboratdir) topish mumkin bo‘lsaki, natijada (2) shakldan hosil bo‘lgan shakl μ_1 o‘zgaruvchilarning farqi l tasini ($0 < l < n$) o‘z ichiga olsa, (1) tenglama x nuqtada parabolik yoki parabolik buziladi deb aytiladi.

Parabolik buzilishi bo‘lmaganda, faqatgina $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$ bo‘lgandagina $K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ bo‘lsa, (1) tenglama $x \in D$ nuqtada elliptik tip deyiladi.

Agarda $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ o‘zgaruvchilar orasidan bittasini, masalan $\lambda_n = \lambda$ ni ajratib olish mumkin bo‘lsaki (zarur bo‘lgan holda bu o‘zgaruvchilarni affin almashtirishdan so‘ng), barcha $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in E^{n-1}$ nuqtalar uchun λ ga nisbatan xarakteristik

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda) = 0$$

tenglamaning barcha ildizlari haqiqiy bo‘lsa, (1) tenglama $x \in D$ nuqtada giperbolik deyiladi.

Agarda λ ildizlarning bir qismi haqiqiy, qolganlari kompleks bo‘lsa, (1) tenglama $x \in D$ nuqtada qo‘shma tipdagi tenglama deyiladi.

Bu ta’rifga asosan $\alpha \geq 3$ bo‘lganda (1) tenglama qo‘shma tip bo‘lishi mumkin.

Qo‘shma turdagi tenglamaga $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\right) = 0$ tenglama misol bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash, chiziqli bo‘lmagan $F = F(x, \dots, D^\alpha, \dots) = 0$ tenglama

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{\alpha=m} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\lambda^\alpha, \qquad \lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\dots\lambda_n^{\alpha_n},$$

shakl xususisiyatiga asosan tiplarga ajratiladi. Bu shakl koeffisientlari x nuqta bilan birga izlanayotgan $u(x)$ yechim va uning hosilalariga bog‘liq bo‘lgani sababli, tiplarga ajratish tekshirilayotgan holda faqat shu yechim uchungina ma’noga ega bo‘ladi.

Masalan,

$$u(x)u_{x_1x_1} + \sum_{i=2}^{n} u_{x_ix_i} = 0$$

tenglama $u(x) > 0$ bo‘lgan $x \in D$ nuqtalarda elliptik, $u(x) < 0$ bo‘lganda gipperbolik va $u(x) = 0$ bo‘lgan $x \in D$ nuqtalarda parabolik buziladi. Endi xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasining klassifikatsiyasiga qisqacha to‘xtalib o‘tamiz.

$F -$ funksiya N o‘lchovli $F = (F_1, \dots F_N)$ vektordan iborat. Bu vektorning $F_1, \dots, F_N$ komponentlari D soha x nuqtalarning hamda $p_0^j = u_j$, $p_\alpha^j = D^\alpha u_j$, $j=1,\dots, M$ haqiqiy o‘zgaruvchilarning berilgan haqiqiy funksiyalari bo‘lsin.

$$F_i(x, \dots, D^\alpha u_j, \dots) = 0, \qquad i = 1, \dots N, j = 1, \dots M \qquad (3)$$

ko‘rinishdagi tenglik, noma’lum $u_1, \dots, u_M$ funksiyalarga nisbatan xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi deyiladi.

(3) tenglamalar sistemasiga kirgan noma’lum funksiyalar hosilalarining eng yuqori tartibi shu sistemaning tartibi deyiladi.

(3) sistemaning tartibi m ga teng bo‘lsin. Agar hamma $F_i -$ funksiyalar barcha p_α^j o‘zgaruvchilarga nisbatan chiziqli bo‘lsa, (3) sistema chiziqli, agarda $F_i -$ lar, $i = 1, \dots, N$, barcha p_α^j, $|\alpha|=m$, larga nisbatan chiziqli bo‘lsa, (3) sistema kvachiziqli deyiladi.

Agar $N = M, N > M, N < M$ bo‘lsa, u holda (3) sistema mos ravishda aniq, ortig‘i bilan aniqlangan, yetarlicha aniqlanmagan deyiladi. (3) sistema aniq bo‘lib, uning har bir tenglamasining tartibi m ga teng bo‘lsin.

Ushbu

$$a_\alpha = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial \rho_\alpha^j} \right\|, i, j = 1, \dots, N, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = m$$

kvadratik matritsani tuzamiz.

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = det \sum_{|\alpha|=m} a\lambda^\alpha = \det \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \lambda_1^{\alpha_1}, \dots, \lambda_n^{\alpha_n} \qquad (4)$$

ifoda haqiqiy skalyar $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ parametrlarga nisbatan Nm tartibli shakldan iboratdir. Bu shakl (3) sistemaning xarakteristik determinanti deyiladi.

(4) shaklning xarakteriga qarab, xuddi (1) tenglamaga o‘xshash, (3) sistema ham tiplarga ajratiladi. Juda ko‘p hollarda amalyotda uchraydigan tenglamalar sistemasini bitta

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha u = f \qquad (5)$$

matritsa tenglama ko‘rinishida yozish mumkin.

Bu yerda D^α differensial operator, $u = (u_1(x), \dots, u_N(x))$ vektor funksiya yoki u=$\|u_j\|$ $j = 1, \dots, N$ matritsa-ustunning har bir komponentiga ta’sir qiladi, α_α- koeffisientlar $N -$ tartibli matritsadan iborat bo‘lib, bular hamda (5) sistemaning o‘ng tomoni $f = (f_1, \dots f_N)$ yoki $f = \|f_j\|$, nomalum $u_j(x)$ funksiyalarga va ularning tartibi $m - 1$ dan katta bo‘lmagan hosilalariga bog’liq bo’lishi mumkin, $m = 1$ bo’lganda (5) sistemadan birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi

$$\sum_{j=1}^{n} a_j D_j u + bu = f \qquad (6)$$

kelib chiqadi, bu yerda $b - N -$ tartibli kvadratik matritsa. (6) tenglamalar sistemasiga mos bo‘lgan $N -$ tartibli xarakteristik shakl ushbu

$$K(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = det \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda_j$$

formula bilan beriladi.

Misol uchun (6) da $n = N = 2, b = 0, f = 0,$

$\alpha_1 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \ \alpha_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$

bo‘lsin. Bu holda ushbu sistemaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{Vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{Vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Vmatrix}u_1\\u_2\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{Vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_2}\begin{Vmatrix}u_1\\u_2\end{Vmatrix}=$$
$$=\begin{Vmatrix}D_1u_1+0\\0+D_1u_2\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}0-D_2u_2\\D_2u_1+0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}D_1u_1-D_2u_2\\D_2u_1+D_1u_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0\\0\end{Vmatrix}$$

yoki

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_2}=-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \tag{7}$$

Shunday qilib, kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazaryasidan ma’lum bo‘lgan Koshi-Riman sistemasi hosil bo‘ldi. (7) sistemaga mos bo‘lgan xarakteristik shakl

$$K=det(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2)=det\begin{Vmatrix}\lambda_1 & -\lambda_2\\\lambda_2 & \lambda_1\end{Vmatrix}=\lambda_1^2+\lambda_2^2$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Demak, Koshi-Riman sistemasi elliptik tipdagi sistema ekan.

Endi bevosita ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili differensial tenglamalarni kanonik ko‘rinishga keltirish yo‘llarini bayon qilamiz.

Ikkita x va y haqiqiy o‘zgaruvchili ikkinchi tartibli kvazichiziqli tenglama ushbu

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\Phi\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{8}$$

ko‘rinishda yoziladi.

(8) tenglama xarakteristiklarining tenglamasi chiziqli bo‘lmagan

$$A\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2=0 \tag{9}$$

tenglamadan iborat.

Bu tenglamani soddagina usul bilan oddiy differensial tenglamaga keltirish mumkin. Haqiqatan ham, $\omega(x,y)$ funksiya (9) tenglamaning yechimi bo‘lsa, $\omega(x,y)=const$ egri chiziq (8) tenglamaning xarakteristikasidir. Bu xarakteristika atrofida

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega}{\partial y}dy=0 \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial\omega}{\partial x}:\frac{\partial\omega}{\partial y}=dy:(-dx)$$

munosabat bajariladi.

(9) tenglamada $\frac{\partial\omega}{\partial x}:\frac{\partial\omega}{\partial y}$ nisbatni $dy:(-dx)$ ga almashtirilib,

$$Ady^2-2\,B\,dydx+C\,dx^2=0 \tag{10}$$

oddiy differensial tenglamaga ega bo‘lamiz.

Aksincha, agar $\omega=\text{const}$ (10) tenglamani integrali bo‘lsa, $\omega(x,y)$ funksiya (9) xarakteristikalar tenglamasini qanoatlantirishi ko‘rinadi. (10) tenglik esa xaraktestik egri chiziqlarning oddiy differensial tenglamasidan iborat bo‘ladi.

(10) tenglik bilan aniqlangan (dx,dy) yo‘nalish odatda xaraktestik yo‘nalish deyiladi. $Ady^2+2Bdxdy+Cdx^2$ kvadratik bo‘lgan shaklning aniqlangan (musbatligi yoki manfiyligi), ishorasi o‘zgaruvhan yoki yarim aniqlangan (buzilgan) bo‘lganiga qarab, (8) tenglama elliptik, giperbolik yoki parabolik tipga tegishli bo‘ladi. Shunga asosan $Ady^2+2Bdxdy+Cdx^2$ kvadratik shaklni diskriminanti B^2-AC noldan kichik bo‘lishi, katta yoki nolga teng bo‘lishiga qarab, mos ravishda (8) tenglamaning tipi elliptik, giperbolik yoki parabolik bo‘ladi.

(8) tenglama elliptiklik sohasida haqiqiy xarakteristik yo‘nalishlarga ega bo‘lmaydi, har bir giperboliklik nuqtasida 2 ta turli haqiqiy xarakteristik yo‘nalish, har bir paraboliklik nuqtada

bitta haqiqiy xarakteristik yo‘nalishlar mavjud. Demak, A, B va C koeffitsientlar yetarli silliq funksiyalar bo‘lganda, (8) tenlamaning giperboliklik sohasi xarakteristik egri chiziqlarning ikkita oilasi turi bilan, paraboliklik sohasi esa xarakteristik egri chiziqlarning bitta oilasi turi bilan qoplanadi. Endi bir amaliy masalani giperbolik tipga tegishli bo‘lgan tenglamaga kelishini isbotlab ko‘rsatmaiz.

Tor deganda erkin egiladigan ingichka ip tushuniladi, boshqacha aytganda, tor shunday qattiq jismki, uning uzunligi boshqa o‘lchovlaridan ancha ortiq bo‘ladi. Torga ta’sir qilib turgan taranglik kuchi yetarli darajada katta deb tasavvur qilamiz. Shu sababli torning egilganligi qarshiligini tarangligiga nisbatan hisobga olmasa ham bo‘ladi. Ikki nuqta orasida tarang qilib tortilgan torni tekshiramiz. Aniqlik uchun bu Ox o‘qida joylashgan bo‘lsin. Biz torning tekis ko‘ndalang tebranishini tekshiramiz, ya’ni bu shunday tebranishki, tor hamma vaqt bir tekislikda yotadi va torning har bir nuqtasi Ox o‘qqa perpendikulyar bo‘lib siljiydi. Bu degan so‘z, muvozanat paytida x absissaga ega bo‘lgan torning nuqtasi tebranish jarayonida ham shu absissaga ega bo‘ladi.

Bu nuqtaning ordinatasi u vaqt o‘tishi bilan o‘zgaradi, ya’ni u torning muvozanat holatidan siljishidan iborat. Tor tebranishining matematik qonunini topish uchun u ning t vaqtga va x ga qanday bog‘liqligini, ya’ni $u = u(x,t)$ funksiyani topish kerak. Biz torning faqat kichik tebranishlarini tekshiramiz, ya’ni $u(x,t)$ va $\frac{\partial u}{\partial x}$ ga nisbatan yuqori tartibli kichiklikdagi $(u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \dots)$ miqdorlarni hisobga olmaymiz.

Tor egilishga qarshilik ko‘rsatmaganligi tufayli, uning t vaqtda x nuqtadagi tarangligi $T(x,y)$ x nuqtada torga o‘tkazilgan urinma bo‘yicha yo‘nalgan bo‘ladi. Torning ixtiyoriy (x_1, x_2) qismini olamiz. Bu qism tebranish davrida (M_1, M_2) shaklga keladi. Buning t vaqtdagi yoy uzunligi

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx x_2 - x_1,$$

ya’ni, kichik tebranishlarda tor qismlarining uzunligi cho‘zilmaydi va qisqarmaydi. Demak, Guk qonuniga asosan taranglik miqdori $|T(x,t)| = T_0$.

Tor tebranishining tenglamasini chiqarish uchun Dalamber prinsipidan foydalanamiz.

Bunga asosan, torning ajratilgan qismiga ta’sir qiluvchi barcha kuchlarning yig‘indisi nolga teng bo‘lishi kerak. Birlik uzunlikda hisoblangan va torga Ou o‘qqa parallel ta’sir qiladigan tashqi kuch $p(x,t)$ bo‘lsin. M_1, M_2 qismga ta’sir qiladigan kuch $\int_{x_1}^{x_2} p(x,t)dx$ ga teng bo‘ladi.

x_2 nuqtadagi taranglikning Ou dagi proeksiyasi $T_0 \sin\alpha(x_2)$ ga, x_1 nuqtadagi esa -$T_0 \sin\alpha(x_1)$ ga teng bo‘ladi. Ushbu

$$sin\alpha(x) = \frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1 + tg^2\alpha(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx u_x$$

formulaga asosan

$$T_0 \sin\alpha(x_2) - T_0 \sin\alpha(x_1) = T_0 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right] = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Torning chiziqli zichligi, ya’ni tor kichkina bo‘lagi massasining uning uzunligiga bo‘lgan nisbatining limiti $\rho(x)$ bo‘lsin.

M nuqta tezligi $\frac{\partial u}{\partial t}$, tezlanishi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ bo‘lgani uchun M_1, M_2 bo‘lakning inersiya kuchi $-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx$ ga teng bo‘ladi. Dalamber prinsipiga asosan

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]dx = 0$$

tenglikka ega bo‘lamiz. $x_1$va x_2 lar ixtiyoriy bo‘lgani uchun

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

bo‘ladi. Bu esa tor kichik ko‘ndalang tebranishlarning tenglamasidir.

Agar zichlik $\rho(x)$ o‘zgarmas bo‘lsa, $\rho(x) = \rho$ torning tebranish tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

ko‘rinishda yoziladi, bunda $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$. Bu tenglama odatda bir o‘lchovli to‘lqin tenglamasi ham deyiladi. Torga ta’sir qilayotgan tashqi kuch $\rho(x,t) = 0$ bo‘lsa, torning erkin tebranish tenglamasi

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}. \qquad (11)$$

Tor yoki sterjen tebranish jarayonining fizik ma’nosidan shu narsa kelib chiqadiki, bu jarayonni bir qiymatli ifodalash uchun qo‘shimcha u siljish va u_1 tezlikning boshlang‘ich vaqtdagi qiymatlarini (boshlang‘ich shartlar) berish zarur:

$$u|_{t=t_0} = \varphi(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \varphi_1(x).$$

Bundan tashqari, torning chetki nuqtalaridagi holatini ham ko‘rsatish kerak. Torning tekshirilayotgan $0 \le x \le l$ qismining ikki chekkasi mustahkamlangan bo‘lsa, izlanayotgan yechim

$$u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0$$

shartlarni qanoatlantirishi zarur. Agar torning yoki sterjenning chetlari mustahkamlanmay, biror qonun bo‘yicha harakatlanayotgan bo‘lsa

$$u|_{x=0} = f_1(t), \quad u|_{x=l} = f_2(t)$$

shartlarni berish kerak.

Agar torning l chetiga berilgan $\psi(t)$ kuch ta’sir qilayotgan bo‘lsa,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \frac{\psi(t)}{T_0}$$

bo’ladi. Haqiqatan ham, bu holda

$$T_0\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} \approx T_0 sin\alpha|_{x=l} = \psi(t).$$

Agar sterjenning ikki yoki bir cheti, masalan $x = l$ elastik mustahkamlangan bo‘lib, $\alpha -$ mustahkamlanganlik qattiqligi koiffisienti bo‘lsa, Guk qonuniga asosan

$$\left.\left(E\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right)\right|_{x=l} = 0$$

bo‘ladi, ya’ni $x = l$ chet siljishi mumkin, ammo mustahkamlanganlikning elastik kuchlari bu chetda taranglik paydo bo‘lishga sabab bo‘ladi, bu esa siljigan chetni oldingi holatiga keltirishga intiladi.

Yuqorida keltirib chiqarilgan to‘lqin tebranish tenglamalari ravshanki, giperbolik tipga tegishlidir. Giperbolik tipga tegishli tenglamalar uchun quyidagi aralash masalalarni qo‘yish mumkin.

Tebranishlar tenglamasi (giperbolik tip), ya’ni (23) tenglama uchun aralash masala bunday qo‘yiladi: $C^2(S_T) \cap \overline{C^1}(S_T)$ sinfga tegishli, S_T silindrda (11) tenglamani, $t = 0$, $x \in \bar{G}(S_T)$ silindrning quyi asosida

$$u|_{t=+0} = u_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=+0} = u_1(x)$$

boshlang’ich shartlarni va $x \in S$, $0 \leq t \leq T$ (S_T ning yon sirti) da I, II yoki III chegaraviy shartlardan bittasini qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiya topilsin.

TADQIQOT NATIJALARI

Boshqa masalalar. Ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili kanonik ko‘rinishga keltirilgan ushbu

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} + b(x,y)\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} + c(x,y)u = f(x,y) \tag{12}$$

umumiy chiziqli tenglama berilgan bo‘lsin. Bu tenglamaning xarakteristikalari tenglamasi $dy^2 - dx^2 = 0$ dan iborat.

Bundan $x - y = const, x + y = const$ to‘g‘ri chiziqlar oilasi (12) tenglamaning xarakteristikalari ekanligi kelib chiqadi.

Uchlari A, B, C va D nuqtalarda tomonlari (12) tenglamaning xaraktristikalaridan iborat bo‘lgan to‘rtburchakni G orqali belgilab olamiz. Odatda bu to‘rtburchak xarakteristik to‘rtburchak deyiladi.

Gursa masalasi. G to‘rtburchakda regular, $\bar{\mathrm{G}}$ da uzluksiz va

$$u|_{AB} = \varphi, \qquad u|_{AB} = \psi$$

shartlarni qanoatlantiruvchi (12) tenglamaning $u(x,y)$ yechimi topilsin.

Masalaning qo‘yilishiga asosan, φ va ψ funksiyalar berilgan sohasida uzluksiz va $\varphi(A) = \psi(A)$ shart bajarilishi zarur. Demak, Gursa masalasida (12) tenglamaning ikkita kesishadigan xarakteristikalarida bitta chegaraviy shart beriladi.

Gursa masalasida shartlar xarakteristikalarda berilgani uchun bu masala xarakteristik masala deb ham ataladi. Endi G orqali $y = 0$ o‘qning ixtiyoriy $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ kesmasi va (12) tenglamaning $AC\colon x + y = x_1, BC\colon x - y = x_2$ xarakteristikalari bilan chegaralangan uchburchakni belgilaymiz. Bu uchburchak xarakteristik uchburchak deyiladi.

Darbu (Koshi-Gursa) ning birinchi masalasi

G da regulyar, $\bar{\mathrm{G}}$ da uzluksiz va

$u(x,0) = \tau(x),\ \ x_1 \leq x \leq x_2, u|_{AC} = \psi(x),\ x_2 \leq x \leq \frac{x_1+x_2}{2}$

shartlarni qanoatlantiruvchi (12) tenglamaning yechimi topilsin, bunda $\tau(x_1)$ va $\psi(x_1) -$ berilgan funsiyalar.

Darbu (Koshi-Gursa) ning ikkinchi masalasi

G da regulyar, $\bar{G}$ da uzluksiz, AB kesmagacha birinchi tartibli hosilaga ega bo‘lgan va

$\lim_{y\to 0} u_y(x,y) = v(x), \quad x_1 < x < x_{2,} \, u|_{AC} = \psi(x), \; x_1 \le x \le \frac{x_1+x_2}{2}$

shartlarni qanoatlantiruvchi (12) tenglamaning yechimi topilsin, bunda

$$v(x) \in C(x_1, x_2), \psi(x) \in C\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right].$$

Giperbolik tipga tegishli kanonik ko‘rinishga keltirilgan tenglama uchun qo‘yilgan ayrim chegaraviy masalalarni echimlarini ko‘rib chiqamiz. Xususan, Gursa masalasini o‘rganamiz. Bu masala fizikaviy jihatdan ham qiziqarli bo'lib, u ko'plab tadbiqiy masalalarda, ayniqsa gaz tozalash, quritish jarayonlari bilan bog'liq masalalarni o'rganishda uchraydi. Bu masalada chegaraviy shartlar tenglamaning xarakteristikalarida berilgani uchun ham Gursa masalasi chegaraviy masala deb yuritiladi. Gursa masalasi chegaraviy masala bo‘lib, chegaraviy shartlar tenglamaning bir nuqtadan chiquvchi xarakteristikalarida beriladi. (x,t) o'zgaruvchilar tekisligida bir jinsli ushbu

$$Lu(x,t) = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (13)$$

tor tebranish tenglamasini qaraylik.

Umumiylikka ziyon qilmasdan (13) tenglamada $a = 1$ deb olish mumkin. Haqiqatdan ham, (x,t) tekisligida quyidagicha yangi $x = x, \;\; u = at$ o‘zgaruvchilar kiritamiz. U holda (1) tenglamada qatnashgan hosilalarni hisoblaymiz:

$u_{tt} = u_{yy}y_t^2 + u_y y_{tt} = a^2 u_{yy}$ va $u_{tt} - a^2 u_{xx} = a^2 u_{yy} + -a^2 u_{xx} = 0$

Bundan esa (13) tenglamani

$$Lu(x,t) \equiv u_{xx} - u_{yy} = 0, \qquad (14)$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin. Ma’lumki, (14) tenglama ikkita haqiqiy xarakteristikalar $x - u = const$ va $x + u = const$ oilasiga ega. (14) tenglamani xarakteristik to‘rtburchakda qaraylik, ya’ni AC_1, C_1B, BC_2 va C_2A xarakteristikalari bilan chegaralangan sohani G deb, belgilaylik. Faraz qilaylik, $A = (0,0)$, $C_1 = (x_1, x_1)$, $C_2=(x_2, -x_2)$ bo‘lsin. Bu yerda $x_1>0$, $x_2>0$.

Gursa masalasi. (14) tenglamaning yopiq G sohada aniqlangan, uzluksiz va quyidagi

$$u(x,y)|_{AC_1} = u(x,y)|_{y=x} = u(x,x) = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le x_1$$
$$u(x,y)|_{AC_2} = u(x,y)|_{y=-x} = u(x,-x) = \psi_2(x) \quad x_1 \le x \le x_2$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimini toping.

Bu yerda $\psi_1(x)$ va $\psi_2(x)$ berilgan yetarlicha silliq funksiyalar bo‘lib, ular uchun $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ tenglik o‘rinli. Ma’lumki, (14) tenglamaning umumiy yechimi

$$u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$$

ko'rinishda bo‘ladi. Bu yerda $f, g \in C^2(R)$. (14) tenglama uchun Gursa masalasining yechimini umumiy yechim asosida quraylik. Bunda $C^2(R)$ sinfga tegishli bo'lgan f, g funksiyalarni topish uchun

$$u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$$

formula bilan aniqlangan $u(x,y)$ funksiyani yuqoridagi shartlarga qo'yamiz, natijada

$u(x,y)|_{y=x} = f(2x) + g(0) = \psi_1(x), u(x,y)|_{y=-x} = f(0) + g(2x) = \psi_2(x),$

$f(2x) + g(0) = \psi_1(x), \;\; f(0) + g(2x) = \psi_2(x),$

tengliklarni olamiz. Demak, f va $g-$ funksiyalarni topish uchun ushbu tenglamalar sistemasiga ega bo'ldik. Bu sistemaning birinchisida x ni $x/2$ ga almashtirib, $f(x)$ funksiyani $f(x) = \psi_1\left(\frac{x}{2}\right) - g(0)$ ko'rinishda topamiz. Xuddi shunday qilib, yuqoridagi shartlardan $g(x)$

funksiyani $g(x) = \psi_2\left(\frac{x}{2}\right) - f(0)$ topamiz. Endi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni umumiy yechimga qo‘yamiz. Natijada Gursa masalasining yechimini quyidagi

$$u(x,y) = \psi_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{x-y}{2}\right) - \psi_1(0), \qquad (15)$$

ko'rinishda topamiz.

Agar $\psi_1(x)$ va $\psi_2(x)$ funksiyalar berilgan sohada ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda (38) formula bilan aniqlangan $u(x,y)$ funksiya qaralayotgan sohada (14) tenglama chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

Demak, quyidagi teorema isbotlandi.

1-teorema. Agar $\psi_1(x)$ va $\psi_2(x)$ funksiyalar $\psi_1(x) \in C[0,x_1] \cap C^2(0,x_1)$,

$\psi_2(x) \in C[0,x_2] \cap C^2(0,x_2)$ bo'lib, ushbu tenglikni $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ qanoatlantirsa, u holda (14) tenglama uchun Gursa masalasining yagona yechimi mavjud bo‘ladi va bu yechim (15) formula bilan aniqlanadi.

Endi (14) tenglamaning $AC{:}\, x + u = 0$, $VS{:}\, x - u = l$ xarakteristikalari va $AB = \{(x,u){:}\, u = 0, 0 < x < l\}$ kesma bilan chegaralangan xarakteristik uchburchakni G deb belgilaylik.

Gursa masalasi. To‘rtburchakli G sohada (14) tenglamaning quyidagi

$u(x,y)|_{AD} = u|_{y=yD} = \varphi_1(x),\ \ x_A \le x \le x_D,\quad u(x,y)|_{DB} = u|_{x=xD} = \varphi_2(y),\ \ y_D \le x \le y_C,$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimini toping. Bu yerda $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(y)$ berilgan yetarlicha silliq funksiyalar va bu funksiyalar uchun $\varphi_1(x_D) = \varphi_2(y_D)$ tenglik o‘rinli.

Gursa masalasi uchun ushbu teoremani isbotlaylik.

2-teorema. Agar (12) tenglamaning koiffisientlari va o‘ng tomoni

$$a(x,y), b(x,y), c(x,y), f(x,y) \in C(\bar{G})$$

hamda berilgan funksiyalar

$$\varphi_1(x) \in C^1[x_A, x_D],\ \ \varphi_2(y) \in C^1[y_D, y_B]$$

bo‘lsa u holda (13)

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial y} v(x,y;x_0,y_0) - a(x,y)v(x,y;x_0,y_0)\right)\right|_{x=x_0} = 0$$

va (12) Gursa masalasining $u(x,y)$ yechimi $C^2(\bar{G})$ sinfda mavjud va yagona bo‘ladi.

Bu teorema ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Riman usuli. Nemis matematigi Riman R. chiziqli giperbolik tipdagi tenglamalar uchun Koshi va Gursa masalalarining yechimini qurish usulini tavsiya qilgan.

Gursa masalasi. To’rtburchakli G sohada

$$L[u] \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \qquad (16)$$

tenglamaning quyidagi

$u(x,y)|_{AD} = u|_{y=yD} = \varphi_1(x),\ x_A \le x \le x_D,\quad u(x,y)|_{DB} = u|_{x=xD} = \varphi_2(y),\ \ y_D \le x \le y_B$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimini toping. Bu yerda $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(y)$ berilgan yetarlicha silliq funksiyalar va bu funksiyalar uchun $\varphi_1(x_D) = \varphi_2(y_D)$ tenglik o’rinli.

Shuni ta'kidlash mumkinki, xuddi Koshi masalasidagi kabi chiziqli giperbolik tenglama uchun Gursa masalasi yechimining integral ifodasini Riman funksiyasi orqali topish mumkin. Buning uchun G sohada fiksirlangan $M_0 = (x_0, y_0)$ nuqtadan (16) tenglamaning $x = x_0$ va $y = y_0$ xarakteristikalarni o'tkazamiz. AD va BD xarakteristikalar bilan kesishgan nuqtasi P va Q bo'lsin.

Endi yuqoridagi formulada $u(x, y)$ funksiyani Gursa masalasining yechimi, $v(x, y)$ ni esa (16) tenglamaning $R(x, y; x_0, y_0)$ Riman funksiyasi deb, hosil bo'lgan ayniyatni $MPDQ$ to'rtburchakli sohada integrallaymiz. Natijada quyidagi

$$u(x_0, y_0) = u(P)v(P) + u(Q)v(Q) - u(D)v(D) + \int_{x_0}^{x_D} \varphi_1(x)(R_x - bR)\big|_{y=y_0} dx +$$

$$+ \int_{y_D}^{y_0} \varphi_2(y)\left(R_y - aR\right)\big|_{x=x_0} dy - \int_{x_D}^{x_0} \int_{y_D}^{y_0} f(x, y)\, R(x, y;\ x_0, y_0) dx dy$$

Gursa masalasi yechimining integral ifodasini olamiz.

1-misol. To'lqin tenglamasi uchun Koshi masalasini yechishni ko'rib chiqamiz:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}, -\infty < x < +\infty, t > 0;\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{x}, 0)}{\partial \mathrm{t}} = \varphi(x),$$

$$f(x) = 3^x,\ \ \varphi(x) = sin2x.$$

Yechish. Xarakteristikalar tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega: $dx^2 - a^2 dt^2 = 0$.

Oxirgi tenglama ikkita tenglamaga bo'linadi, ularning yechimlari to'g'ri chiziqlardan iborat: $x - at = C_1$, $x + at = C_2$. $\xi = x + at, \eta = x - at$ almashtirish kiritib, quyidagi tenglamani olamiz:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Oxirgi tenglamaning umumiy integralini takroriy integrallash orqali hisoblash oson:

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

oldingi o'zgaruvchilarni quyidagicha olamiz:

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \qquad (*)$$

Yechimni dastlabki shartlarga almashtirib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$u|_{t=0} = f_1(x) + f_2(x) = 3^x, u_t|_{t=0} = af_1'(x) - af_2'(x) = sin2x$$

Ikkinchi tenglikni birlashtirib olamiz:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^{x} sin2s ds + C = \frac{1}{2a}(sin2x - sin2x_0) + C,$$

bu yerda x_0, $C - const.$

Shunday qilib biz, quyidagini olamiz;

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = 3^x, \\ f_1(x) - f_2(x) = \dfrac{1}{2a}(sin2x - sin2x_0) + C. \end{cases}$$

Endi oxirgi ikkita tenglikni ifodalaylik f_1 va f_2 lar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f_1(x) = \frac{3^x}{2} + \frac{1}{4a}(sin2x - sin2x_0) + \frac{C}{2}, f_2(x) = \frac{3^x}{2} - \frac{1}{4a}(sin2x - sin2x_0) - \frac{C}{2}.$$

Olingan ifodalarni umumiy yechimga almashtirib (*) topamiz:

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) = \frac{3^{x+at}}{2} + \frac{1}{4a}(sin2(x + at) - sin2x_0) + \frac{C}{2} + \frac{3^{x-at}}{2} -$$

$$-\frac{1}{4a}(sin2(x-at)-sin2x_0)-\frac{C}{2}=3^x\left(\frac{3^{at}+3^{-at}}{2}\right)+\frac{1}{4a}(\sin(2x+2at)-\sin(2x-2at))$$
$$=$$
$$=3^x\left(\frac{3^{at}+3^{-at}}{2}\right)+\frac{1}{2a}(\sin(2at)\cos(2x)).$$

Shunday qilib, Koshi masalasining yechimi quyidagi ko'rinishga ega bo’ladi:

$$u(x,t)=3^x\left(\frac{3^{at}+3^{-at}}{2}\right)+\frac{1}{2a}(\sin(2at)\cos(2x)).$$

To’lqin tenglamasi uchun aralash masala masalani ko’rib chiqamiz.

MUHOKAMA

1-misol. To'lqin tenglamasi uchun aralash masalani yeching ($N\ -$ variantlar soni):

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x^2}, \qquad 0<x<l, \qquad 0<t<+\infty;$$
$$u(x,0)=x(x-l), \qquad \frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{x},0)}{\partial \mathrm{t}}=0, \qquad \mathrm{u}(0,\mathrm{t})=0, \qquad \mathrm{u}(\mathrm{l},\mathrm{t})=0,$$

bu erda $N=3, a=3, l=0{,}5$ bo’lsin.

Yechish. Yechimni $X=X(x)$ va $T=T(t)$ argumentga bog‘liq bo‘lgan ikkita funksiya ko‘paytmasi ko‘rinishida izlaymiz, ya’ni,

$$u(x,t)=\ X\,(x)T\,(t).$$

Buni tenglamaga qo’yib, quyidagilarga ega bo’lamiz:

$$X(x)T''(t)=9X''(x)T(t)\ \Rightarrow\ \frac{1}{9}\frac{T''}{T(t)}=\frac{X''}{X(x)}.$$

Tenglamalarning ikkala qismi ham x yoki t ga bog'liq emas, demak:

$$\frac{1}{9}\frac{T''}{T(t)}=\frac{X''}{X(x)}=-\lambda=\ const.$$

Bu yerdan ikkinchi tartibli ikkita oddiy bir jinsli chiziqli tenglamani olamiz:

$T''(t)+9\lambda T(t)=0$ va $X''(x)+9\lambda X(x)=0.$

Nolga teng bo’lmagan yechimlarni olish uchun chegara shartlari, ahamiyatsiz bo’lmagan yechimlarni topish kerak. Chegara shartlar: $X(0)\ =\ 0,\quad X(0{,}5)=\ 0$. Bu masalani yechib, $\lambda>0$ ekanligini aniqlaymiz. Uning umumiy yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$y(t)=Acos(\sqrt{\lambda}t)+Bsin(\sqrt{\lambda}t), \qquad x\in[0{,}05].$$

Chegara shartlaridan A va B koeffitsientlari topiladi:

$y(0)=A=0$ va $y(1)=Acos(\sqrt{\lambda})+Bsin(\sqrt{\lambda})=Bsin(\lambda)=0.$

Shunday qilib $sin(\sqrt{\lambda})=0$, bunda $\sqrt{\lambda}=\pi k,\quad k\in N$ bo‘ladi.

Shuning uchun Shturm-Liouville masalasidagi xos qiymatlari quyidagicha bo’ladi: $\lambda=\pi^2\kappa^2, k\in N$ va xos funktsiyalar quyidagicha ko'rinishga ega:

$$X_k(x)=\sin(\pi kx).$$

Endi hamma $k\ \in N$ uchun tenglama yechimining umumiy ko’rinishini yozamiz:

$$T_k'(t)+9\pi^2\kappa^2T(t)=0.$$

Bu tenglamaning umumiy yechimi:

$$T_k(t)=A_k\sin(3\pi kt)+B_k\cos(3\pi kt).$$

O’z navbatida

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_k\,(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_k(x)\,T_k(t).$$

Chegara shartlaridan topamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_k(x)T_k(0)=\sum_{n=1}^{\infty}X_k(x)(B_k)=x(x-0.5)$$

va

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_k(x)T_k'(0)=3\pi\sum_{n=1}^{\infty}kX_k(x)(A_k)=0.$$

Noma'lum A_k va B_k koeffitsientlarini topish uchun biz $x(x-0.5)$ funktsiyani $X_k(x)$ bo'yicha Fur'e qatoriga yoyamiz: $x(x-0.5)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kX_k(x)$, bu erda

$$a_k=2\int_0^1 x(x-0.5)\sin(\pi kx)\,dx=-\frac{(-1)^k(\pi^2k^2-4)+4}{\pi^3k^3}.$$

Bu tenglamadan $b_k=0$ va $A_k=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Bundan, $B_k=a_k=-\frac{(-1)^k(\pi^2k^2-4)+4}{\pi^3k^3}$. Demak, yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_k(x)T_k(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi kt)\frac{(-1)^k(4-\pi^2k^2)-4}{\pi^3k^3}\cos(3\pi kt).$$

2-misol. Quyidagi Gursa masalasini yeching:

$$\partial_x^2u+12\partial_x\partial_yu+35\partial_y^2u+\partial_xu+5\partial_xu=0,$$

$$y>0,x>0,\qquad u(x,5x)=xcosx,\qquad u(x,7x)=xsinx.$$

Yechish. $D=b^2-a*c=16x^4>0$, tenglama giperbolik tipga tegishli. Xarakteristik tenglamani tuzamiz: $(dy)^2-4x^2dxdy=0,\ \triangle=16x^4$.

Chunki $A=0$ tenglamada $u\ dy$ ga nisbatan yechiladi va ikkita tenglamaga parchalanadi:

$$dy-(-2x^2+4x^2)dx=0,\qquad dy-(-2x^2-4x^2)dx=0.$$

Tenglamani yechamiz:

$$dy=2x^2dx\ \Rightarrow\ \int dy=\int 2x^2\,dx, y=\frac{2x^3}{3}+C_1\Rightarrow\ C_1=y-\frac{2x^3}{3}\Rightarrow$$

$$dy=-6x^2dx\Rightarrow\int dy=-\int 6x^2\,dx\Rightarrow y=-2x^3+C_2\Rightarrow C_2=y+2x^3.$$

Yechim xarakteristikalar oilasidir: $\varphi_1(x,y)=3y-2x^3=C_1,\varphi_2(x,y)=y+2x^3=C_2$.

Shunday qilib, bu holda o'zgaruvchilarning o'zgarishi quyidagicha ko'rinadi:

$$\xi=3y-2x^3,\eta=y+2x^3\Rightarrow\partial_x\xi=-6x^2,\partial_y\xi=3,\partial_x\eta=6x^2,\partial_y\eta=1.$$

Endi yangi koeffitsientlarni hisoblaymiz:

$$\bar a_{11}=\bar a_{22}=0\ \Rightarrow\bar a_{12}=-12x^4\ \Rightarrow\bar b_1=0\Rightarrow\bar b_2=0\Rightarrow\bar c=0\Rightarrow\bar f=0.$$

Yangi tenglamani yozamiz:

$$-12x^4u_{\xi\eta}=0\ \Rightarrow u_{\xi\eta}=0\ \Rightarrow u=g(\eta)+\int f(\xi)d\,\eta=g(\eta)+h(\xi)$$

∂_xu ni ifodalaymiz: $\partial_xu=-6x^2f_x'+6x^2g_x'$.

Qo'shimcha shartlardan foydalanib, $g=\int\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}x\,,f=y^2-\frac{1}{3}x$ ekanligini topamiz.

XULOSA

Yuqorida keltirilganlardan koʻrinib turibdiki, xususiy hosilali differensial tenglamalar, shu jumladan giperbolik tipga tegishli tenglamalarning amaliy ahamiyati juda keng. Masalan, lokal boʻlmagan muammolar neft qatlamlarini matematik modellashtirishda, yer osti suvlarini filtrlashda, murakkab tuzilishga ega boʻlgan obʼyektda issiqlik va massa almashinuvini oʻrganish giperbolik tipdagi tenglamalarga olib kelinadi. Shu munosabat bilan oʻzbek va xorijlik olimlar tomonidan mazkur yoʻnalish boʻyicha chuqur izlanishlar olib borilmoqda. Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun nolokal masalalar [1-14] ilmiy maqolalarda oʻrganilgan. Trikomi va boshqa aralash chegaraviy masalalar [15-38] ilmiy izlanishlarda oʻrganilgan boʻlib, masalalar yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan. [39-52] maqolalarda matematik fizika tenglamalari va boshqa fanlardagi mavzularni ilgʻor pedagogik pedagogik texnologiyalar yordamida oʻtish yoʻllari hamda matematik fizika fanining biologik jarayonlarni modellashtirishda qoʻllanishi koʻrsatilgan.

Ushbu yoʻnalishdagi mavzular boʻyicha ilmiy izlanishlar olib borish talabadan fundamental fanlardan chuqur bilimga ega boʻlishni talab qiladi. Jumladan, masalalarni oʻrganishda keng qoʻllaniladigan turli differensial va integral operatorlar tahlil qilishni, ketma-ket yaqinlashish usuli, Shauder prinsipi, ekstremum prinsiplari va energiya integrali nazariyasi, gipergeometrik va boshqa maxsus funksiyalarni bilishlari lozim.

REFERENCES

1. Мирсабуров М. Нелокальная краевая задача для вырождающегося эллип-тического уравнения // Дифференциальные уравнения, 38:1 (2002), 129–131.
2. Мирсабуров М. Краевая задача для одного класса уравнений смешанного типа с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках // Дифференциальные уравнения, 37:9, (2001), 1281-1284.
3. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
4. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырож-дающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
5. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
6. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
7. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
8. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.
9. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.

10. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
11. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
12. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.
13. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
14. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.
15. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с не-прерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.
16. Расулов Х.Р., Ф.М. Джуракулова (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress. 2:1, 455-462 бетлар.
17. Расулов Х.Р. и др. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нели-нейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
18. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.
19. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. (2022) Ikkita buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptic tenglama uchun chegaraviy masala haqida // Central Asian Academic Journal Of Scientific Research, 2(5), 544-557 b.
20. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
21. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века. 53:6-1, 2019. С.16-18.
22. Rasulov Kh.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy // Irish Interdisciplinary Journal of Science & Research (IIJSR), 6:2 (2022), p. 8-14. DOI: http://doi.org/10.46759/IIJSR.2022.6202
23. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta'lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g'oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.
24. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

25. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
26. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
27. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
28. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающещеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
29. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
30. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
31. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
32. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
33. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
34. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
35. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
36. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
37. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
38. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).
39. Расулов Х.Р., Собиров С. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:9 (2021), p.7-20.
40. Расулов Х.Р., Собиров С. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.
41. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.

42. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.
43. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo‘yicha ba’zi uslubiy ko‘rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
44. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
45. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
46. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.
47. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
48. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
49. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
50. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
51. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.
52. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.