АНАЛОГ ТЕОРЕМА ЙЕНСЕНА ДЛЯ $A(z)-$ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Неъматиллаева Мухайё Давлатали кизи
Базовый докторант (PhD) Национального университета имени Мирзо Улугбека
https://doi.org/10.5281/zenodo.7256178

Аннотация. *В статье исследуются $A(z)-$аналитические функции в рассматриваемой выпуклой области. Доказывается аналог теоремы Йенсена для $A(z)-$ аналитических функций.*

Ключевые слова: *Уравнения Бельтрами, $A(z)-$аналитическая функция, лемниската, аналог теоремы Коши, аналог формулы Йенсена для $A(z)-$ аналитических функций.*

AN ANALOGUE OF JENSEN'S THEOREM FOR $A(z)-$ANALYTIC FUNCTIONS

Abstract. *The article studies $A(z)-$analytic functions in the considered convex domain. It proves an analogue of Jensen's theorem for $A(z)-$analytic functions.*

Keywords: *Beltrami equations, analytic functions, lemniscate,analog of Cauchy's theorem, analog of Jensen's formula for analytic functions.*

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена аналитической теории решения уравнения Бельтрами

$$f_{\bar{z}}(z)=A(z)f_z(z), \qquad (1)$$

имеющего непосредственное отношение к квазиконформным отображениям. Относительно функции $A(z)$, в общем случае предполагается, что она измерима и $|A(z)|\le C<1$ почти всюду в рассматриваемой области $D\subset\mathbb{C}$. В литературе решения уравнения (1) принято говорить $A-$аналитическими функциями. В настоящей работе предполагается, что $A(z)-$антианалитическая, $\partial A=0$ в области $D\subset\mathbb{C}$. Изучение $A(z)-$аналитических функций инициировано с целым рядом их применений в задачах томографии: рентгеновская, сейсмическая и др. Эти задачи связаны с задачей Радона о восстановлении функций по заданным свойствам на гиперплоскостях. В цикле работ А.Л.Бухгейма и С.Г.Казанцева [4] задача Радона интерпретируется при помощи краевых задач для бесконечномерного аналога уравнения $f_{\bar{z}}-Af_z=0$, где $f-$функция комплексного аргумента z со значениями в некотором банаховом пространстве X и $A-$ линейно непрерывный оператор $A:\ X\to X,\ \|A\|<1.$

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Пусть $A-$антианалитическая, $\partial A=0,$ в области $D\subset\mathbb{C}$ и такая, что $|A(z)|\le C<1,\ \forall z\in D.$ Положим

$$D_A = \frac{\partial}{\partial z} - \bar{A}(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{D}_A = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial}{\partial z} \quad .$$

Тогда согласно (1.1) класс аналитических функций $f(z) \in O_A(D)$ характеризуется тем, что $\bar{D}_A f(z) = 0$. Так как антианалитическая функция является бесконечно гладкой, то из [1] вытекает, что $O_A(D) \subset C^{\infty}(D)$.

Данная статья посвящена изучению аналог теорема Йенсена. Теорема Йенсена аналитических функций рассмотрен в работах П.Кусис, Е.С.Титчмарш (см. [13],[14]).

РЕЗУЛЬТАТЫ

Основным результатом работы является

Теорема А (Аналог теорема Йенсена). Пусть $f \in O_A(L(a,R))$. Предположим, что $f(a) \neq 0$, и пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – нулей функции f в $L(a,R)$ и $r_n = |\psi(a,a_n)|$, расположенные в неубывающем порядке. Тогда при $r_n \le r \le r_{n+1}$

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{|\psi(z,a)|=r} \ln|f(z)||dz + A(z)d\bar{z}| = \ln\frac{r^n f(a)}{r_1 r_2 r_3 \ldots r_n}.$$

Для доказательства Теоремы А мы приведем ряд нужных нам результатов из теории $A(z)$ - аналитических функций.

Теорема 1 (см. [8]) (аналог теоремы Коши). Если $f \in O_A(D) \cap C(\bar{D})$, где $D \subset \mathbb{C}$ − область со спрямляемой границей ∂D, то $\int_{\partial D} f(z)(dz + A(z)d\bar{z}) = 0$.

Теорема 2 (см. [9]) (формула Коши). Пусть $D \subset \mathbb{C}$ − выпуклая область и $G \subset D$ − произвольная подобласть с кусочно гладкой границей ∂G. Тогда для любой функции $f(z) \in O_A(G) \cap C(\bar{G})$ имеет место формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}} (d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}), \quad z \in G. \tag{2}$$

Сначала заметим, что аналогом степенных рядов для A − аналитических функций будут ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi^j(z,a), \ a \in D, \ c_j - \text{константы}. \tag{3}$$

Областью сходимости ряда (3) будет лемниската $L(a,r) = \{|\psi(z,a)| < r\}$, где радиус сходимости r находится по формуле Коши-Адамара: $\frac{1}{r} = \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|c_j|}$.

Теорема 3 (см. [12]) (разложение в ряд Лорана). Пусть $f(z)-A$ аналитична в кольце из лемнискат: $f\in O_A\left(L(a,R)\setminus L(a,r)\right),\ r<R.$ Тогда $f(z)$ разлагается в этом кольце в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\psi^k(z,a). \tag{4}$$

где $c_k=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial L(a,\rho)}\dfrac{f(\xi)}{\left[\psi(\xi,a)\right]^{k+1}}\left(d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\right),\ 0<\rho<r,\ k=0,1,2....$

Ряд (4) сходится равномерно внутри кольца $L(a,R)\setminus L(a,r)=\left\{z\in D:\ r<\left|\psi(z,a)\right|<R\right\}.$

Доказательство основного результата. Обозначим через $n(r)$ число нулей функции $f(z)$ в $L(a,r)$. Мы можем написать:

$$\ln\frac{r^n\left|f(a)\right|}{r_1r_2...r_n}=n\ln r-\sum_{m=1}^{n}\ln r_m+\ln\left|f(a)\right|=\sum_{m=1}^{n-1}m\left(\ln r_{m+1}-\ln r_m\right)+n\left(\ln r-\ln r_n\right)+\ln\left|f(a\right.$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}m\int_{r_m}^{r_{m+1}}\frac{dr}{r}+n\int_{r_n}^{r}\frac{dr}{r}+\ln\left|f(a)\right|=\sum_{m=1}^{n-1}\int_{r_m}^{r_{m+1}}\frac{n(r)dr}{r}+\int_{0}^{r_n}\frac{n(r)}{r}dr+\ln\left|f(a)\right|=\int_{0}^{r_n}\frac{n(r)}{r}dr+$$

$$+\int_{r_n}^{r}\frac{n(r)}{r}dr+\ln\left|f(a)\right|=\int_{0}^{r}\frac{n(r)dr}{r}+\ln\left|f(a)\right|.$$

Если $f(z)$ не имеет нулей на $L(a,r)$, то (см. [Kh1])

$$n(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\left|\psi(z,a)\right|=r}\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}\left(dz+A(z)d\bar{z}\right). \tag{5}$$

Формально формула Йенсена получается отсюда после деления на r, интегрирования по r и отделения вещественных частей (см. [Kh2]).

В интервале между радиусами r_n,r_{n+1} двух последовательных нулей каждая из двух частей формулы Йенсена имеет непрерывную производную. Производная левой части равна $\dfrac{n(r)}{r}$, а производная правой части есть

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2\pi r}\int_{\left|\psi(z,a)\right|=r}\ln\left|f(z)\right|\left|dz+A(z)d\bar{z}\right|\right]=\left[\psi(z,a)=re^{it}\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln f(z)+\ln\overline{f(z)}\right)dt\right]=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln f(z)+\ln\overline{f(z)}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{f_z'(z)z_r'+f_{\bar z}'(z)\bar z_r'}{f(z)}+\frac{\overline{f_z'(z)}\bar z_r'+\overline{f_{\bar z}'(z)}z_r'}{\overline{f(z)}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{f_z'(z)\left(z_r'+A(z)\bar z_r'\right)}{f(z)}+\frac{\overline{f_z'(z)}\left(\bar z_r'+\overline{A(z)}z_r'\right)}{\overline{f(z)}}\right)dt=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f_z'(z)\left(z_r'+A(z)\bar z_r'\right)}{f(z)}dt\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f_z'(z)\left(\frac{e^{it}-Ae^{-it}}{1-|A|^2}+A\frac{e^{-it}-\bar Ae^{it}}{1-|A|^2}\right)}{f(z)}dt\right\}=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f_z'(z)}{f(z)}e^{it}dt\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi r}\int_{|\psi(z,a)|}\frac{f_z'(z)}{f(z)}\left(dz+A(z)\right)d\bar z\right\}.$$

В силу формулы (5) правая часть этого равенства равна $\frac{n(r)}{r}$. Следовательно, в каждом таком интервале производные равны между собой, так что одна часть формулы Йенсена может отличаться от другой только на постоянную. Но при $r=0$ эти части, очевидно, равны между собой. Следовательно, достаточно доказать, что они изменяются непрерывно, когда r проходит через значение r_n. Для левой части это очевидно. Что касается правой части, то достаточно рассмотреть случай, когда имеется только один нуль с $|\psi(a,a_n)|=r_n$, причем можно считать, что $\psi(a,a_n)=r_n$. Тогда (см. [Kh1])

$$f(z)=\psi(z,a_n)e^{g(z)}=\psi(a_n,a)\left(1-\frac{\psi(z,a)}{\psi(a_n,a)}\right)e^{g(z)}=\left(1-\frac{r}{r_n}e^{it}\right)r_ne^{g(z)}$$

и

$$\ln|f(z)|=\ln\left|1-\frac{r}{r_n}e^{it}\right|+\eta(r,t)$$

причем функция $\eta(r,t):=\ln r_n+\operatorname{Re}g(z)$ непрерывна в окрестности значения $r=r_n$. Следовательно, достаточно доказать, что интеграл

$$\int_0^{2\pi}\ln\left|1-\frac{r}{r_n}e^{it}\right|dt.$$

непрерывен при $r=r_n$. Но при $\frac{r}{r_n}<2$

$$9 \ge \left|1-\frac{r}{r_n}e^{it}\right|^2 = 1-2\frac{r}{r_n}\cos t+\frac{r^2}{r_n^2} = \sin^2 t+\left(\cos t-\frac{r}{r_n}\right)^2 \ge \sin^2 t$$

следовательно, при $\delta \in [0,\pi)$ и $\delta \to 0+$

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} \ln\left|1-\frac{r}{r_n}e^{it}\right| dt\right| < \int_{-\delta}^{\delta}\left(\ln 3+\left|\ln|\sin t|\right|\right)dt < \int_{-\delta}^{\delta}\left(\ln 3+\left|\ln|t|\right|\right)dt <$$

$$< (2+\ln 9)\delta+2\delta\ln\frac{1}{\delta} < (4+\ln 9)\delta\ln\frac{1}{\delta}.$$

Мы можем выбрать δ столь малым, чтобы правая часть была произвольно малой для всех значений r вблизи r_n, при фиксированном же б остаток интеграла, очевидно, непрерывен. Следовательно, и весь интеграл $\int_0^{2\pi} \ln\left|1-\frac{r}{r_n}e^{it}\right| dt$ непрерывен.

ОБСУЖДЕНИЕ

В этом работе является исследование $A(z)-$аналитических функций в рассматриваемой выпуклой области. В статье использованы свойства, теоремы и понятия, актуальные для $A(z)-$аналитических функций в выпуклых областях. Например, для $A(z)-$аналитических функций можно привести теорему Коши и формулу Коши.

ВЫВОДЫ

Из доказанной нами теоремы вытекает для выше теорема. Доказана теорема Йенсена для произведение Бляшки.

Доказано несколько теорем для аналитических функций в выпуклых областях. С помощью некоторых других теорем, применимых к аналитическим функциям, были доказаны аналог теорема Йенсена.

REFERENCES

1. Ahlfors L. Lectures on quasiconformal mappings, Toronto-New York-London, 1966, 133 pp.
2. Арбузов Э.В. Задача Коши для эллиптических систем второго порядка на плоскости, СМЖ, 2003, Т. 44, №1, С. 3-20.
3. Арбузов Э.В., Бухгейм А.Л. Задача Коши для $A(z)-$ гармонических функций, Доклады наук РАН, 1996, Т. 349, №5, С. 586-587.
4. Бухгейм А.Л., Казанцев С.Г. Эллиптические системы типа Бельтрами и задачи томографии, Доклады АН СССР, 1990, Т. 315, № 1, С. 15-19.
5. Bojarski B. Homeomorphic solutions of Beltrami systems, Доклады АН СССР, 1955, Т.102, №4, С. 661-664.
6. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции, - М.: «Наука»,1988, 512 с.
7. Gutlyanski V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation: a geometric approach, Springer, 2011.

8. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Теорема Коши для $A(z)$-аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2014, №1, С. 15-18.
9. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Аналог интегральной формулы Коши для -аналитических функций, Узбекский математический журн., 2016, №4, С.50-59.
10. Tishabaev J.K., Otaboyev T.U., Khursanov Sh.Ya. Residues and argument prinsple for $A(z)-$analytic functions,Journal of Mathematical Sciences, 2020, Vol.245, No. 3, pp. 350-358.
11. Nasriddin.M.Jabborov. Morera's theorem and functional series in the class of A(z)−analytic functions, J. Siberian Fed. Univ. Math. & Physics, 2018, Vol.11, №1, pp. 50-59.
12. Sadullaev A., Jabborov N.M. On a class of A-analitic functions, J. Siberian Fed. Univ., Math. & Physics, 2016, Vol. 9, №3, pp. 374-383.
13. П.Кусис , Введение в теорию простанств H^p. 85-89.
14. E.C.Titchmarsh, M. A., F.R.S. The theory of functions, . Savilian Professor of Geometry in the University of Oxford Second Edition [1939],132-138**.**