SCIENCE AND INNOVATION
INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL VOLUME 1 ISSUE 7
UIF-2022: 8.2 | ISSN: 2181-3337

УШЛАБ ҚОЛУВЧИ ЧЕГАРАЛИ УМУМЛАШГАН ТИКЛАНИШ ЖАРАЁНИНИНГ БАЛАНД ЧЕГАРАГА ЕТИБ БОРИШ ВАҚТИ ҲАҚИДА

Ходжибаев Вали Рахимджанович
Наманган муҳандислик-қурилиш институти профессори
Жураев Олим Камолиддинович
Наманган муҳандислик-қурилиш институти ўқитувчиси

https://doi.org/10.5281/zenodo.7256117

Аннотация. *Ушлаб қолувчи қуйи чегарали умумлашган тикланиш жараёни қаралади. Жараён изларининг узоқлашиб борувчи юқори чегарага биринчи маротаба етиб бориш вақтининг ўрта қиймати учун жараён сакрашининг математик кутилмаси нолга тенг бўлган ҳолда асимптотик ёйилма топилган.*

Калит сўзлар: *чегаравий масалалар, тикланиш жараёни, асимптотик ёйилмалар*

О ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ВЫСОКОГО УРОВНЯ ОБОБЩЁННЫМ ПРОЦЕССОМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ЗАДЕРЖИВАЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ

Аннотация. *Рассматривается обобщённый процесс восстановления с задерживающей нижней границей. Получено асимптотическое разложение для среднего значения времени первого достижения удаляющейся верхней границы траекториями процесса, в случае, когда математическое ожидание скачка процесса равно нулю.*

Ключевые слова: *Граничные задачи, процесс восстановления, асимптотические разложения.*

ON THE TIME TO REACH A HIGH LEVEL BY A GENERALIZED RENEWAL PROCESS WITH A DELAYING BOUNDARY

Abstracts. We consider a generalized renewal process with a delaying lower bound. An asymptotic expansion is obtained for the average value of the time of the first reaching the receding upper boundary by the process trajectories, in the case when the mathematical expectation of the process jump is equal to zero.

Keywords: Boundary problems, renewal process, asymptotic expansions.

КИРИШ

Тасодифий жараёнлар учун чегаравий масалалар ҳозирги замон эҳтимолликлар назариясида муҳим ўрин тутади. Чунки улар эҳтимолликлар назариясининг турли амалий соҳаларида кўплаб тадбиқларга эга. Тасодифий жараён изларининг биринчи маротаба бирор тўплам чегарасига етиб бориши билан боғлиқ бўлган масалалар чегаравий масалалар дейилади. Амалиётда кўплаб икки, қуйи ва юқори чегаралар билан боғлиқ масалалар кўплаб учрайди. Бундай чегаравий функционалларни ўрганишда, асосан, 2 та йўналиш кузатилади. Улардан биринчиси чегаралар билан боғлиқ бўлган тасодифий миқдорлар тақсимоти ва характеристикалари учун аниқ формулалар топиш бўлса, иккинчиси асимптотик формулалар ҳосил қилишдир. Биринчи йўналишда жуда хусусий бўлган баъзи ҳолларда натижаларга эришиш мумкин. Шунинг учун иккинчи йўналишга асосий эътибор қаратилади. Ушбу мақола ҳам иккинчи йўналишга тегишли бўлиб, унда қуйи чегара ушлаб қолувчи бўлган умумлашган тикланиш жараёни қаралади. Бундай жараёнлар оммавий хизмат кўрсатиш тизимларида, заҳираларни сақлаш, оптимал бошқариш назарияларида, кетма-кет таҳлил масалаларида кўплаб учрайди. Қаралаётган жараён изларининг биринчи маротаба узоқлашиб борувчи юқори чегарага етиб бориш моментининг математик кутилмаси учун асимптотик ёйилма ҳосил қилинган. Бунда жараён сакрашларининг математик кутилмаси нолга тенг бўлган ҳол қаралади. Бу масала сакрашлар ўрта қиймати манфий бўлган ҳол учун [1] да кўрилган.

ТАДҚИҚОТ МАТЕРИАЛЛАРИ ВА МЕТОДОЛОГИЯСИ

Иккита бир-бирига боғлиқ бўлмаган $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ ва $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n, ...$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги берилган бўлиб, ҳар бир кетма-кетликдаги тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқсиз, бир хил тақсимланган ва $P(X_1>0)P(X_1<0)>0,\ P(\theta_1>0)=1$ бўлсин.

$$S_0=0,\ S_n=X_1+X_2+...+X_n,\ \theta(t)=\max\{k\geq 1:\theta_1+\theta_2+...\theta_k<t\},\ X(t)=S_{\theta(t)}$$

белгилашларни киритамиз. $X(t)$ тасодифий жараён сонлар ўқида $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n, ...$ тасодифий моментларда мос равишда $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ боғлиқсиз тасодифий сакрашларга эга бўлган тасодифий дайдишни ифодалайди. $X(t)$ жараён, одатда, умумлашган тикланиш жараёни дейилади в у, умуман олганда, бир жинсли бўлмайди. Агар тасодифий миқдор θ_1 кўрсаткичли тақсимот қонунига эга бўлса, $X(t)$ бир жинсли бўлади ва умумлашган Пуассон жараёни деб номланади.

$Y(t, a),\ (t\geq 0)$ тасодифий жараённи қуйидагича аниқлаймиз:

$$Y(0, a)=0,\ Y(t, a)=X(t)-a-\min\left\{-a;\inf_{s\leq t}X(s)\right\},\ a\geq 0.$$

$Y(t, a)$ $[-a,\infty)$ интервалнинг қуйи чегараси ушлаб қолувчи бўлган тасодифий жараёндир. Бундай тасодифий жараёнлар, юқорида таъкидланганидек, кўплаб амалий масалаларда учрайди. Ихтиёрий $b>0$ сон учун

$$\eta(a, b)=\inf\{t>0: Y(t, a)\geq b\}$$

бўлсин. У ҳолда $\eta(a, b)$ тасодифий миқдор $Y(t, a)$ жараённинг биринчи маротаба b сонидан кичик бўлмаган қийматга эришиш моментини аниқлайди.

Ушбу мақолада характеристик функциялар ва факторизация усулларидан фойдаланиб, $\eta(a, b)$ тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси $E\eta(a, b)$ учун $a\to\infty,\ b\to\infty,\ EX_1=0$ бўлганда асимптотик ёйилма топилади.

ТАДҚИҚОТ НАТИЖАЛАРИ

Ушбу ишдаги асосий натижани исботлаш учун [2], [3] мақолалардаги баъзи натижалардан фойдаланилади. Бунинг учун қуйидаги шарт ўринли бўлиши талаб этилади:

(C) $Ee^{\lambda X_1}<\infty,\ -\alpha\leq\lambda\leq\beta,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ EX_1=0$ ва X_1 тасодифий миқдор абсолют узлуксиз компонентага эга бўлсин.

Бир қатор белгилашлар киритамиз:

$$\eta_+=\min\{n\geq 1: S_n\geq 0\},\ \eta_-=\min\{n\geq 1: S_n<0\},\ \chi_\pm=S_{\eta_\pm},$$

$$a_0(x) = E(\chi_- + x,\ \chi_- < x)\cdot(E\chi_-)^{-1}, \qquad b_0(x) = E(\chi_+ - x,\ \chi_+ \geq x)\cdot(E\chi_+)^{-1},$$

$$A_1 = \int_0^\infty a_0(x)\,dx, \quad A_2 = 2\int_0^\infty x a_0(x)\,dx, \quad B_1 = \int_0^\infty b_0(x)\,dx, \quad B_2 = 2\int_0^\infty x b_0(x)\,dx, \quad \psi_1 = \sqrt{2/EX_1^2},$$

$$u_1 = \psi_1 \frac{E\chi_-^2}{E\chi_-},\ \ v_1 = -\psi_1 \frac{E\chi_+^2}{\chi_+},\ \ c_1 = u_1 + v_1, \quad c_2 = \frac{E\chi_+^3}{3\chi_+} - \frac{E\chi_-^3}{3E\chi_-} + \frac{v_1^2}{2\psi_1^2} + \frac{u_1 v_1}{2\psi_1^2} + A_2.$$

$Y(t,a)$ билан S_n орасидаги боғланишдан ва боғлиқсиз бир хил тақсимланган тасодифий миқдорлар йиғиндисидан ҳосил бўлган тасодифий дайдишлар учун [2], [3] мақолалардаги баъзи натижалардан фойдаланиб қуйидаги теоремани ҳосил қиламиз.

Теорема. (C) *шарт бажарилган бўлсин. У ҳолда шундай* $\varepsilon > 0$ *сони мавжудки,* $a \to \infty,\ b \to \infty$ *бўлганда*

$$E\eta(a,b) = (EX_1^2)^{-1} E\theta_1\{(a+b)^2 - \frac{c_1}{\psi_1}(a+b) + (a^2 + 2aA_1 + c_2)\frac{v_1 + 2\psi_1 b}{c_1 + 2\psi_1(a+b)} +$$

$$+(b^2 + 2bB_1 + B_2)\frac{u_1 + 2\psi_1 a}{c_1 + 2\psi_1(a+b)}\} + O(e^{-\varepsilon a}) + O(e^{-\varepsilon b})$$

тенглик ўринли бўлади.

Таъкидлаш лозимки, теоремада иштирок этаётган ε соннинг қиймати $1 - Ee^{\lambda X_1}$ функциянинг $-\varepsilon < \mathrm{Re}\,\lambda < \varepsilon$ соҳада аналитиклигини сақлашига ва комплекс илдизларга эга бўлмаслигига боғлиқ.

МУҲОКАМА

Мақолада қаралаётган $\eta(a,b)$ тасодифий миқдорни ўрганишга кўплаб муаллифларнинг илмий ишлари бағишланган. Баъзи библиографик маълумотларни [4]-[7] да топиш мумкин. $X(t)$ бир жинсли боғлиқсиз орттирмали тасодифий жараён бўлганда [6] да $\eta(a,b)$ тасодифий миқдор Лаплас-Стилтьес акслантириши учун, [7] да $E\eta(a,b)$ учун асимптотик ёйилмалар топилган. Бирок [6], [7] ишларда $X(t)$ тасодифий жараённинг диффузион компонентаси ёки чизиқли оғиши (снос) мавжуд бўлиши талаб қилинган. Яъни зинасимон жараёнлар четлаб ўтилган. Шунинг учун бу ерда $X(t)$ умумлашган тикланиш жараёни, яъни зинасимон жараён бўлган ҳол қаралган.

ХУЛОСА

Икки чегара билан боғлиқ бўлган тасодифий чегаравий функционалаларни ўрганиш, улар кўплаб амалий тадбиқларга эга бўлганлиги учун, мухим аҳамиятга эга. Чегаравий функционалларнинг, хусусан, $\eta(a,b)$ нинг тақсимотини ва уларнинг характеристикаларини ўрганиш етарли даражада мураккаб ва нозик аналитик усулларни қўллашни тақазо этади. Ушбу мақоладаги натижаларни олишда, асосан, аналитик усул ҳисобланган факторизация усули қўлланилган. Олинган натижалар эҳтимолликлар назариясининг кўплаб тадбиқий соҳаларида қўлланилиши мумкин.

REFERENCES

1. Ходжибаев В.Р.,Олимжанова М.И. О среднем времени достижения уровня для одного

класса процессов с задерживающей границей. Научный Вестник НамГУ, №12, 2021 год, стр.33-39.
2. Лотов В.И. О случайных блужданиях в полосе. Теория вероятн. и ее примен. 1991, том 36, выпуск 1, стр. 160-165.
3. Лотов В.И. Об аппроксимации математического ожидания времени первого выхода случайного блуждания из интервала. Сиб. матем. журн., 2016, том 57, №.1, стр. 113-120.
4. Лотов В.И. О достижении высокого уровня блужданием с задержкой в нуле. Сибирский матем. журн, 1999, том 40, № 6, стр.1276-1288.
5. Lotov V.I., Khodjibayev V.R. On the limit theorems for the first exit time from a strip for stochastic processes I. Siberian Adv.Math.,1998, v.8, №.3, p.90-113.
6. Lotov V.I., Khodjibayev V.R. On the limit theorems for the first exit time from a strip for stochastic processes II. Siberian Adv.Math.,1998, v.8, №.4, p.41-59.
7. Khodjibayev V.R. Asymptotic representations for characteristics of exit from an interval for stochastic processes with independent increments. Siberian Adv.Math, 1997, T. 7, №.3, pp.75-86.