MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARINING KLASSIFIKASIYASI VA GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALARNING AMALIY TADBIQLARI HAQIDA

Narziyev Fazliddin Baxromovich
Termez davlat universiteti magistri
https://doi.org/10.5281/zenodo.7312636

Annotasiya. *Ushbu maqolada matematik fizika tenglamalariga keltiriladigan masalalarni tushunarli yoritishga ahamiyat berilgan. Tenglamalarni klassifikasiyalash bo'yicha nazariy ma'lumotlar bayon qilingan va tasniflashga doir misollar yechib ko'rsatilgan. Tor tebrabnish tenglamasi uchun Koshi masalasining qo'yilishi ko'rsatilib, masala yechimining turg'unligi isbotlangan. Giperbolik tipdagi tenglama uchun Dirixle masalasini nokorrekt qo'yilganligini talabalarga qulay usulda tushuntirishning yo'llari bayon qilingan. Mustaqil ishlash uchun bir nechta misollar tavsiya qilingan.*

Kalit so'zlar: *matematik fizika tenglamalari, matematik model, klassik mexanika, differensial tenglamalar, integral, integro-differensial va algebraik tenglamalar, gidrodinamika, elektrodinamika, diskret nuqtalar to'plami, fizik effektlar, biribchi tartibli, ikkinchi tartibli va uchinchi tartibli xususiy hosilali tenglamalar, kanonik ko'rinish, D'alamber formulasi.*

О КЛАССИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ПРАКТИЧЕСКИХ ПРИМЕНЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Аннотация. *В данной статье большое значение уделяется доступному объяснению вопросов, связанных с применениями уравнениями математической физики. Описаны теоретические сведения о классификации уравнений и приведены примеры и их решения по классификации. Показана постановка задачи Коши для уравнения колебаний струны и доказана устойчивость решения задачи. В более доступной форме объясняются некорректность задачи Дирихле для уравнения гиперболического типа. Рекомендованы ряд примеров для самостоятельной работы.*

Ключевые слова: *уравнения математической физики, математическая модель, классическая механика, дифференциальные уравнения, интегральные, интегро-дифференциальные и алгебраические уравнения, гидродинамика, электродинамика, множество дискретных точек, физические эффекты, дифференциалные уравнения в частных производных первого, второго и третьего порядка, каноническое представление, формула Даламбера.*

THE CLASSIFICATION OF MATHEMATICAL PHYSICS EQUATIONS AND PRACTICAL APPLICATIONS OF EQUATIONS OF THE HYPERBOLIC TYPE

Abstract. *In this article, importance is given to the understandable explanation of the issues related to the equations of mathematical physics. Theoretical information on classification of equations is described and examples of classification are shown. The formulation of the Cauchy problem for the narrow oscillation equation is shown, and the stability of the solution of the problem is proved. Ways to explain to students the incorrect formulation of the Dirichlet problem for the hyperbolic type equation are explained in a convenient way. Several examples are recommended for independent work.*

Keywords: *mathematical physics equations, mathematical model, classical mechanics, differential equations, integral, integro-differential and algebraic equations, hydrodynamics,*

electrodynamics, set of discrete points, physical effects, first-order, second-order and third-order partial derivatives differential equations, canonical representation, D'alamber formula.

KIRISH

Tabiatdagi hodisalarning matematik modellari asosan xususiy hosilali differentsial tenglamalar, shuningdek, boshqa turdagi (integral, integro-differensial va boshqalar) tenglamalar orqali ifodalanadi. Matematik fizika tenglamalari nazariyasi fizik hodisani o'rganishda zarur bo'ladigan formada masalalarni tuzish bilan tavsiflanadi. Fizik hodisalarning matematik modellari nazariyasi (Rits va Galerkin usullari) matematikada ham, fizikada ham alohida o'rin tutadi.

Matematik fizika matematik modelni qurish bilan bog'liq bo'limda fizika bilan chambarchas bog'liq va shu bilan birga - matematikaning bir bo'limi, modellarni o'rganish usullariga bag'ishlangan. Matematik fizikaning metodlar kontseptsiyasi fizik hodisalarning katta sinflarini tavsiflovchi matematik modellarni qurish va o'rganish uchun ishlatiladigan matematik usullarni o'z ichiga oladi.

TADQIQOT MATERIALLARI VA METODOLOGIYASI

Mexanikaning fizikani matematik modellari nazariyasi sifatidagi usullari I.Nyutonning klassik mexanika va universal tortishish asoslarini, yorug'lik nazariyasini yaratishga qaratilgan say-harakatlari bilan intensiv ravishda rivojlana boshladi. J. Lagranj, L. Eyler, P. Laplas, J. Furye, C. Gauss, B. Riman, M. V. Ostrogradskiy (Ostrogradskiy) va boshqa ko'plab olimlar matematik fizikaning metodlarini ishlab chiqishga katta hissa qo'shgan. A. M. Lyapunov va V.A. Steklov fizikaning XIX asrning 2-yarmidan boshlab elektrodinamika, akustika, elastiklik nazariyasi, gidro va aerodinamika va uzluksiz ommaviy axborot vositalarida fizik hodisalarni o'rganishning boshqa bir qator sohalari bilan bog'liq bo'lgan fizik hodisalarning matematik modellarini va to'lqin funksiyalarini o'rganishda muvaffaqiyatli qo'llashdi. Matematik modellar ko'pincha xususiy differensial tenglamalar yordamida tasvirlanadi, bular matematik fizikaning tenglamalari deb ataladi. Fizikaning matematik modellari tasvirida matematik fizikaning differensial tenglamalaridan tashqari integral tenglamalar va integro-differensial tenglamalar, variatsion va nazariy-ehtimolli usullar, potensial nazariya, murakkab o'zgaruvchining funksiyalar nazariyasi usullari va matematikaning boshqa bir qator shoxlaridan foydalaniladi.

Fizika muammolarini ishlab chiqish o'rganilayogan fizik hodisalar sinfining asosiy qonuniyatlarini tavsiflovchi matematik modellar qurilishidan iborat. Bunday formula tenglamalar (differensial, integral, integro-differensial yoki algebraik) hosil bo'lishidan iborat bo'lib, ular fizik jarayonni xarakterlovchi miqdorlar bilan ifodalanadi. Shu bilan birga, ular fenomenning faqat eng muhim xususiyatlarini hisobga olib, uning bir qator ikkinchi darajali xususiyatlaridan chalg'itadigan asosiy jismoniy qonun-qoidalardan o'tadilar. Bunday qonunlar odatda muhofaza qonunlari, masalan, harakat miqdori, energiya, zarralar soni va boshqalar. Bu turli jismoniy tabiatdagi jarayonlarni tasvirlash uchun bir xil matematik modellar qo'llanilishiga olib keladi, lekin umumiy xarakterli xususiyatlarga ega bo'ladi.

Masalan, giperbolik tipdagi eng sodda tenglama uchun matematik muammolar ushbu $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dastlab olingan (Dalamber, 1747 yil) bir hil ipning erkin tebranishlarini ifodalash uchun qo'llaniladi. Shuningdek, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ tenglama uchun chegaraviy masalalar dastlab P. Laplas tomonidan o'rganilgan.

Masalalarni yechishdagi umumiy usullarning ko'pchiligi aniq fizik muammolarni hal qilishning alohida usullariga bog'liq va o'zining dastlabki formasida qat'iy matematik asoslashga va yetarlicha to'liqlikka ega bo'lmaganligi bilan ham xarakterlidir. Samarali aniq masalalarni yechish uchun ushbu usullarning barchasidan foydalanish ularni qat'iy matematik asoslash va umumlashtirish sabablaridan biri bo'lib, ba'zi hollarda yangi matematik yo'nalishlarning paydo bo'lishiga olib keladi.

Matematikaning turli tarmoqlariga qo'llanilishi, shuningdek, tabiiy fanlar talablari va amaliyot talablarini aks ettiruvchi matematikaning rivojlanishi matematikaning allaqachon o'rnatilgan ayrim tarmoqlarida tadqiqot yo'nalishini qayta yo'lga qo'yilishi bilan namoyon bo'ladi. Haqiqiy fizik hodisalarning matematik modellarini ishlab chiqish bilan bog'liq bo'lgan fizikadagi muammolarning shakllanishi xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining asosiy muammolarining o'zgarishiga olib keldi. Chegaraviy shartlar masalalari haqidagi ta'limot paydo bo'lgan (Chegaraviy qiymat muammolari), keyinchalik xususiy hosilali differensial tenglamalarni integral tenglamalar va variatsion usullar bilan bog'lash imkoniyatini yaratilgan.

Fizikaning matematik modellarini matematik usullar bo'yicha o'rganish fizik hodisalarning asl mohiyatiga chuqur kirib borish, yashirin formalarni aniqlash va yangi natijalarni oldindan aytib berish imkoniyatini yaratadi. Jismoniy hodisalarni batafsilroq o'rganish kompyuterlar yordamida to'g'ridan-to'g'ri raqamli usullardan foydalanishni tasvirlayotganlarning yanada murakkablashishiga olib keladi. Matematikaning tipik muammolari uchun sonli usullarning qo'llanilishi uzluksiz argumentning tenglamalarini algebraik tenglamalar bilan almashtirish hisobiga o'rganiladi. Bunda diskret nuqtalar to'plamida (to'rda) berilgan to'r funktsiyalari uchun uzluksiz argumentning tenglamalari almashtiriladi. Boshqacha qilib aytganda, vositaning uzluksiz modeli o'rniga uning diskret analogi joriy etiladi. Sonli usullarning qo'llanilishi ba'zi hollarda murakkab, vaqt talab qiladigan va qimmat fizik tajribani ancha texnik matematik (sonli) tajriba bilan almashtirish imkoniyatini yaratadi. Haqiqiy fizik eksperimentning optimal sharoitlar murakkab fizik qurilmalar parametrlarini tanlash, yangi fizik effektlarning namoyon bo'lishi uchun sharoitlarni aniqlash va boshqalar uchun asos bo'ladi. Shunday qilib, sonli usullar hodisalarning matematik modellaridan samarali foydalanish sohasini kengaytiradi.

Hodisaning matematik modeli, har qanday model kabi, hodisaning barcha xususiyatlarini yetkaza olmaydi. Qabul qilingan modelning o'rganilgan hodisada yetarliligini faqat amaliyot mezoni yordamida o'rnatish, qabul qilingan modelning nazariy tadqiqotlari natijalarini tajribalar ma'lumotlari bilan taqqoslash bilan bilish mumkin.

TADQIQOT NATIJALARI

Fizika matematik modellarni qurish bilan xarakterlanadi. Bu modellar nafaqat o'rganilayotgan fenomenlar oralig'ining allaqachon o'rnatilgan fizik qonuniyatlarini tasvirlaydi va tushuntiradi, balki hali kashf etilmagan namunalarni oldindan aytib berishga ham imkon beradi. Bunday modelning klassik namunasi Nyutonning universal tortishish haqidagi ta'limoti bo'lib, u nafaqat yaratilishi vaqtida ma'lum bo'lgan quyosh sistemasi jismlarining harakatini tushuntirish, balki yangi sayyoralar mavjudligini oldindan aytib berish imkoniyatini yaratdi. Boshqa tomondan, yangi paydo bo'lgan yangi eksperimental ma'lumotlarni har doim qabul qilingan modelning ramkasi bilan izohlab bo'lmaydi. Ularni tushuntirish uchun modelning murakkabligi talab qilinadi. (Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1972 г., 649 с.)

Noma'lum $u(x)=u(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning xususiy hosilalarini va $x_1,x_2,...,x_n$ erkli o'zgaruvchilarni bog'lovchi quyidagi ifoda

$$F\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n},...,\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}},...\right)=0 \quad (1)$$

xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi. Bu yerda F(·) – o'z argumentlarining berilgan funksiyasi, $x\in D\subset R^n,\, n\geq 2;\, k_1+k_2+...+k_n=k,\, k=\overline{0,\,m};\, m\geq 1;$ D esa (1) tenglamaning berilish sohasi deyiladi. Differensial tenglamada noma'lum funksiya xususiy hosilasining eng yuqori tartibiga shu tenglamaning tartibi deyiladi.

Agar $u(x)=u(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya biror D sohada aniqlangan, uzluksiy va tenglamada qatnashgan uzluksiz hosilalarga ega bo'lib, shu sohada tenglamani qanoatlantirsa, u holda bu funksiya tenglamaning yechimi deb ataladi.

Agar F barcha $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}},\quad 0\leq k\leq m,$ hosilalarga nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda (1) tenglama chiziqli xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi. Chiziqli tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{k_1,...,k_2} a_{k_1,...,k_n}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}=f(x),\quad \sum_{j=1}^{n}k_j=k$$

yoki $\mathrm{L}u=f(\mathrm{x})$, bu yerda $\mathrm{L}\equiv\sum_{k=0}^{n}\sum_{k_1,...,k_n} a_{k_1...k_n}(\mathrm{x})\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}},\quad \sum_{j=1}^{n}k_j=k$, m – tartibli chiziqli differensial operator deb ataladi.

Odatda xususiy hosilali chiziqli ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama quyidagicha ifodalanadi

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\mathrm{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(\mathrm{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(\mathrm{x})\mathrm{u}=f(x), \quad (2)$$

bu yerda $a_{ij}(x),\ b_i(x),\ c(x)$ biror chekli yoki cheksiz D sohada berilgan funksiyalar, ular tenglamaning koeffitsiyentlari, $f(x)$ esa tenglamaning ozod hadi deyiladi.

Agar chiziqli tenglamada $f(x)=0$ bo'lsa, u bir jinsli, aksincha, ya'ni $f(x)\neq 0$ bo'lsa, bir jinsli bo'lmagan tenglama deyiladi. Agar (2) tenglamada uning chap tomonini $L(u)$ orqali belgilasak, u holda (2) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olish mumkin:

$$L(u)=f(x), \quad (3)$$

bu yerda

$$L(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \tag{4}$$

ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial operator deyiladi.

(1) tenglamada F faqat yuqori tartibli $\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}$, $\sum_{j=1}^{n} k_j = m$ hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda (1) kvazichiziqli tenglama deyiladi.

Masalan, quyidagi tenglama

$$a\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} +$$
$$+c\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

ikki o'zgaruvchili ikkinchi tartibli kvazichiziqli tenglama deyiladi.

Agar (4) ifodada $a_{ij}(x) \equiv 0, i, j = \overline{1, n},$ va $b_i(x)$ koeffitsiyentlardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, u holda (4) ifoda birinchi tartibli chiziqli operator deb ataladi. Masalan, bir jinsli torning ko'ndalang tebranishi, sterjenning bo'ylama tebranishi, o'tkazgichdagi elektr tebranishlar, turli muhitlarda tovush tarqalishi va shu kabi jarayonlar

$$u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + f(x,y,z,t), \; a = const \tag{5}$$

to'lqin tenglamasi bilan ifodalanadi va bu tenglama uch o'lchovli to'lqin tarqalish tenglamasi deyiladi. Xususiy hosilali differensial tenglamalarni qaysi tipga tegishli bo'lishi uning yuqori tartibli hosilalari oldidagi koeffisiyentlari orqali aniqlanadi. Xususiy hosilali tenglamalarning klassifikatsiyasi hamda ikki o'zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning kanonik ko'rinishga keltirishni bayon qilamiz. Kanonik tenglamani yangi noma'lum funksiya kiritish bilan yanada soddaroq ko'rinishga keltirishni ko'rsatamiz.

Quyidagi

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x) \tag{6}$$

ikkinchi tartibli n o'zgaruvchili chiziqli differensial tenglamani R^n Evklid fazosidagi biror D sohada qaraylik. Bu yerda $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n$, $A_{ij}(x), B_i(x), C(x)$ - tenglamaning koeffitsiyentlari va $f(x)$ - ozod hadi berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

$\forall x \in D$ uchun (6) tenglamada $A_{ij}(x) = 0$ bo'lsa, u holda (6) tenglama birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama bo'ladi. Shuning uchun qaralayotgan D sohada tenglamaning $A_{ij}(x)$ koeffitsiyentlari bir vaqtda nolga teng bo'lmasin, deb talab qilamiz. Hamda $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$ tenglik o'rinli bo'lsin.

Faraz qilaylik, $x_0 \in D$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Chiziqli (6) tenglamaga mos ushbu xarakteristik forma

$$Q(\lambda_1,...,\lambda_n)=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x_0)\lambda_i\lambda_j \qquad (7)$$

kvadratik forma deb ataladi. Algebra kursidan ma'lumki, Q kvadratik formani D sohaning har bir x_0 nuqtasida $\lambda_i=\lambda_i(\xi_1,...,\xi_n),\ i=1,2,...,n$ xosmas almashtirishlar yordamida quyidagi

$$Q=\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i^2 \qquad (8)$$

kanonik ko'rinishga keltirish mumkin. Bu yerda a_i koeffitsiyentlar −1, 0 va 1 qiymatlarni qabul qiladi. Qaralayotgan (6) chiziqli tenglamaning klassifikatsiyasi (8) formaning a_i koeffitsiyentlari qabul qiladigan qiymatlariga asoslanadi:

- agar barcha $a_i=1$ yoki $a_i=-1,\ (i=\overline{1,n})$ bo'lsa, ya'ni (7) kvadratik forma musbat yoki manfiy aniqlanga bo'lsa, u holda (6) tenglama x_0 nuqtada elliptik tipdagi tenglama deyiladi;

- agar a_i koeffitsiyentlardan biri manfiy, qolganlari musbat (yoki aksincha) bo'lsa, u holda (6) tenglama x_0 nuqtada giperbolik tipdagi tenglama deyiladi;

- agar a_i koeffitsiyentlardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, u holda () tenglama x_0 nuqtada parabolik tipdagi tenglama deyiladi;

- agar a_i koeffitsiyentlarning $l\ (1<l<n-1)$ tasi musbat, $n-l$ tasi manfiy bo'lsa, u holda (6) tenglama x_0 nuqtada ultragiperbolik tipdagi tenglama deyiladi;

- agar D sohaning har bir nuqtasida (8) kvadratik forma koeffitsiyentlarining barchasi noldan farqli va har xil ishorali, barchasi noldan farqli va bir xil ishorali hamda kamida bittasi (hammasi emas) nolga teng bo'lsa, u holda (6) tenglama D sohada mos ravishda giperbolik, elliptik hamda parabolik tipdagi tenglama deyiladi (Соболев С.А., Уравнения математической физики, Москва, 1966 г., 559 с.).

MUHOKAMA

Agar (6) tenglama qaralayotgan D sohaning turli qismlarida har xil tipga tegishli bo'lsa, u holda (6) tenglama D sohada aralash tipdagi tenglama deyiladi.

1-misol. Butun R^n fazoda aniqlangan $\Delta u(x)\equiv\sum_{n=1}^{n}\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i^2}=0$ tenglamani tipini aniqlang.

Yechish. Laplas tenglamasiga mos $Q(\lambda_1,...,\lambda_n)=\sum_{n=1}^{n}\lambda_i^2$ kvadratik formani tuzamiz. Agar $i=j$ bo'lsa, u holda $A_{ij}(x)=1$ va $i\neq j$ bo'lganda $A_{ij}(x)=0$ bo'ladi. Shuning uchun (8) kvadratik formaning koeffitsiyentlari $\alpha_i=1,\ (i=\overline{1,n})$ qiymatni qabul qiladi. Demak, tenglama butun R^n fazoda elliptik tipdagi tenglama bo'ladi.

2 misol. $\square u(x,t)\equiv u_{tt}-a^2\sum_{n=1}^{n}\frac{\partial^2u(x)}{\partial x_i^2}=u_{tt}-a^2\Delta u=0$ tenglamani tipini aniqlang.

Yechish. Tenglamaga mos kvadratik forma

$$Q\left(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{n}\left(-a^2\lambda_i^2\right) + \lambda_{n+1}^2 = \lambda_{n+1}^2 - \sum_{n=1}^{n} a^2\lambda_i^2$$

bo'ladi. Bu kvadratik forma $\xi_i = a\lambda_i, \left(i = \overline{1,n}\right), \xi_{n+1} = \lambda_{n+1}$ almashtirish yordamida quyidagi $Q = \xi_{n+1}^2 - \sum_{n=1}^{n} a^2\xi_i^2$ kanonik ko'rinishga keladi. a_i koelfitsiyentlardan biri musbat, qolganlari esa manfiy. Demak, tenglama giperbolik tipdagi tenglama ekan.

Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalar – bu berilgan differensial tenglamaning qaralayotgan sohada ma'lum bir qo'shimcha shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iborat ekanligini bilamiz.

Qo'shimcha shartlar ko'p hollarda chegaraviy shartlar bo'lishi mumkin, ya'ni noma'lum funksiyaning qiymati qaralayotgan jismning sirtida yoki boshlang'ich shartlar - fizik jarayonni o'rganishda uning boshlang'ich vaqtdagi holati orqali berilishi mumkin. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarning yechimi o'rganilayotgan fizik jarayonning taqribiy matematik ifodasini beradi. Fizikaviy jarayonlarning matematik modellarini qurishda uning ayrim parametrlari abstraktlashtiriladi. Ko'pgina ko'rsatkichlarining jarayonga ta'siri sezilarsiz deb, muhim hisoblangan parametrlar ajratib olinadi va shu parametrlar asosida fizikaviy jarayonning matematik modeli xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Fizikaviy jarayonlarning matematik modellashtirilishidan olingan natijalar taqribiy natijalar hisoblanadi. Shunday qilib, xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan boshlang'ich -chegaraviy masalalarning korrektligi tushunchasini kiritamiz. Matematik fizika masalalari real fizik jarayonlarning matematik modelini ifodalagani uchun bu masalalar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi zarur: a) qaralayotgan masala ma'lum bir funksiyalar (M_1) sinfida yechimga ega (yechimning mavjudligi); b) qaralayotgan masalaning yechimi bir funksiyalar (M_2) sinfida yagona (yechimning yagonaligi); c) yechim boshlang'ich va chegaraviy shartlarga, tenglamaning koeffitsientlariga, ozod hadiga va boshqa berilganlarga uzluksiz bog'liq (yechimining turg'unligi).

Bu shartlar bir qarashda o'rinlidek ko'rinadi, lekin ularni fizikaviy jarayonning qurilgan matematik modeli asosida isbotlash kerak.

Qo'yilgan masalaning korrektligini isbotlash - bu matematik modelning birinchi ko'rinishidir, ya'ni: a) qurilgan model jarayonga zid emas (masalaning yechimi mavjud); b) model fizik jarayonni bir qiymatli ifodalaydi (masalaning yechimi yagona); c) fizik kattaliklarning xatoliklari qurilgan modelga sezilarsiz ta'sir qiladi (yechim masalaning berilganlariga uzluksiz bog'liq, ya'ni berilganlaming ozgina o'zgarishiga yechimning ham ozgina o'zgarishi mos keladi).

Yuqoridagi a) - c) shartlarni qanoatlantiruvchi boshlangich chegaraviy masala Adamar ma'nosida korrekt qo'yilgan masala deb ataladi. Bo'sh bo'lmagan $M = M_1 \cap M_2$ funksiyalar sinfi boshlangich chegaraviy masalaning korrektlik sinfi deyiladi. Agar boshlang'ich-chegaraviy masala a)-c) shartlardan birortasini qanoatlantirmasa, u holda bunday masala nokorrekt qo'yilgan yoki noto'g'ri qo'yilgan masala deb ataladi (Курант Р. Уравнения с частными производными, перевод с английского, Москва, 1964 г., 879 с.).

Nokorrekt qo‘yilgan masalalarga misollar keltiramiz.

3-misol. Tomonlarining nisbati irratsional bo’lgan to’g’ri to‘rtburchakli ushbu $D=\{(x,t):0<x<\pi,\ 0<t<\theta\pi\}$ sohada $u_{tt}-u_{xx}=0$ tor tebranish tenglamasining

$$u(x,0)=0,\quad u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0,\quad u(x,\theta\pi)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}},\ 0\le x\le\pi,\ n>0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ yechimi topilsin. Noma’lum funksiyaning qiymati qaralayotgan sohaning chegarasida berilgani uchun bu masala tor tebranish tenglamasi uchun Dirixle masalasi deb yuritiladi.

Yechish. Ma’lumki, qaralayotgan masalaning yechimi $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sin(nt)\sin(nx)}{\sin(\theta n\pi)}$ formula bilan aniqlanadi. Chegaraviy shartdan $n\to\infty$ bo’lganda $\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\to 0$ bo’lishini ko’rsatish qiyin emas. Sonlar nazariyasidan bizga ma’lumki, ixtiyoriy berilgan ε_n ratsional son uchun shunday p_n va q_n butun sonlar krtma-ketligi mavjud bo’lib, har qanday θ irratsional son uchun quyidagi tengsizlik $|\theta-\tau_n|=\left|\theta-\frac{p_n}{q_n}\right|<\varepsilon_n=\frac{1}{q_n^2}$ o’rinli bo’ladi. Unga asosan

$$|\sin(\theta\pi q_n)|=|\sin(\theta\pi q_n-\pi p_n)|=$$

$$=\left|\sin\left(\pi q_n\left(\theta-\frac{p_n}{q_n}\right)\right)\right|\le\pi q_n\left|\theta-\frac{p_n}{q_n}\right|<\pi q_n\varepsilon_n=\frac{\pi}{q_n}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Oxirgi tengsizlikka ko’ra, qaralayotgan masalaning $u(x,t)$ yechimi uchun $|u_{q_n}(x,t)|=\frac{1}{\sqrt{q_n}}\frac{|\sin(q_nt)||\sin(q_nx)|}{|\sin(\theta\pi q_n)|}>\frac{\sqrt{q_n}}{\pi}|\sin(q_nt)||\sin(q_nx)|$ tengsizlikka ega bo’lamiz. Bu tengsizlikdan $q_n\to\infty$ bo’lganda $u_{q_n}(x,t)\to\infty$ bo’lishi kelib chiqadi.

Demak, tor tebranish tenglamasi uchun qo’yilgan Dirixle masalasida yechimning turg’unligi buzilar ekan. Bundan giperbolik tipdagi tenglamalar uchun qo’yilgan Dirixle masalasining nokorrekt ekanligi kelib chiqadi.

Endi tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi, D’alamber formulasi, Koshi masalasi yechimining turg’unligiga doir asosiy ma'lumotlarni keltiramiz. Mexanika va fizikaning tebranish jarayonlari bilan bog’liq bir qator muammolari, masalan, tor va membrananing tebranishi, gaz, elektromagnit to’lqinlarning tarqalishi kabi jarayonlar, mexanika va fizikaning tebranish jarayonlari bilan bog’liq bir qator masalalri giperbolik tipdagi tenglama bilan ifodalanadi. Ushbu paragrafda tor tebrabnish tenglamasi uchun Koshi masalasining qo’yilishi, D’alamber formulasi va uning fizikaviy talqini, Koshi masalasining yechimining turg’unligini isbotlaymiz. Shu bilan birga bir jinsli bo’lmagan tor tebranish tenlamasi uchun Koshi masalasi yechimini keltiramiz.

Koshi masalasining qo’yilishi. Eng sodda giperbolik tipdagi tenglama ushbu

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad a = const \tag{9}$$

ko'rinishda bo'lib, u tor tebranish tenglamasi yoki to'lqin tarqalish tenglamasi deyiladi.

To'lqin tarqalish nazariyasida Koshi masalasi mihim o'rin egallaydi. (x, t) tekislikdagi biror $D = \{(x, \mathrm{t}):\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0\}$ sohada (9) tor tebranish tenglamasini qaraymiz.

Ta'rif. Agar $u(x, y)$ funksiya D sohada aniqlangan, uzluksiz va ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, shu sohada (9) tenglamani qanoatlantirsa, bu funksiya tor tebranish tenglamasining D sohadagi regulyar yechimi deyiladi.

Koshi masalasi. Tor tebranish tenglamasining yopiq $\bar{D}$ sohada aniqlangan, uzluksiz va

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < +\infty \tag{10}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimini toping. Bu yerda $\varphi_0(x),\ \varphi_1(x)$ – berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Tor tenglamasi uchun Koshi masalasi cheksiz uzunlikdagi tor tebranishining matematik modeli bo'lib, uning chetki nuqtalari torning boshqa qismlarining tebranishiga ta'sir qilmaydi. Shuning uchun ham (9) – (10) Koshi masalasida chegaraviy shartlar qatnashmaydi.

Tor tebranish tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun (9) tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz: $a(x,t)(dt)^2 - 2b(x,t)dtdx + c(x,t)(dx)^2 = 0$, bu yerda $a(x,t) = a^2,\ b(x,t) = 0,\ c(x,t) = -1$ va $\delta = a^2 > 0$. Demak, (1) tor tebranish tenglamasi $R^2_{x,\,t}$ tekislikda giperbolik tipdagi tenglama ekan. U holda u ikkita haqiqiy va har xil $x + at = c_1 = const, \quad x - at = c_2 = const$ yechimlarga ega. Bu formulalar bilan aniqlangan to'g'ri chiziqlar tor tebranish tenglamasining xarakteristikalari oilasini ifodalaydi.

Quyidagi $\xi = x + at, \quad \eta = x - at$ tengliklarga asosan yangi ξ, η o'zgaruvchilar kiritamiz va xususiy hosilalarni $u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi} - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta}\ u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$ topamiz. Hosilalarni (9) tenglamaga qo'yib, ushbu $u_{\xi\eta} = 0$ kanonik ko'rinishga keladi.

Oxirgi tenglamani ketma-ket integrallab, kanonik tenglamaning umumiy yechimini $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ ko'rinishda topamiz. Masala shartlari va bir qator usullarni qo'llab

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x+at) + \varphi_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)\,dz \tag{11}$$

ifodani hosil qilamiz. Bu bir jinsli tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimini ifodalovchi D'alamber formulasi deyiladi.

Koshi masalasining qo'yilishida $\varphi_0(x),\ \varphi_1(x)$ funksiyalarni yetarlicha silliq bo'lsin deb talab qilgan edik. Endi bu funksiyalarning qaysi sinfga tegishli ekanini aniqlaymiz. Agar $\varphi_0(x) \in C^2(R^1),\ \varphi_1(x) \in C^1(R^1)$ bo'lsa, u holda (11) formula bilan aniqlangan $u(x, t)$ funksiya (9) tor tebranish tenglamasini va (10) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirishini bevosita tekshirib ishonch hosil qilish mumkin. Bu tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimi mavjud ekanligini ko'rsatadi.

Koshi masalasi yechimining turg'unligi ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $u_0(x,t)$ funksiya (9) tenglamaning quyidagi $u(x,0)=\varphi_0^0(x)$, $u_t(x,0)=\varphi_1^0(x)$, $x\in R$ boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yechimi bo'lsin. Xuddi yuqoridagi kabi $u_0(x,t)$ funksiya ham (11) formula orqali quriladi. Agar $\left|\varphi_0(x)-\varphi_0^0(x)\right|<\delta$, $\left|\varphi_1(x)-\varphi_1^0(x)\right|<\delta$ $\forall x\in R$ bo'lsa, u holda $\forall x\in R$, $t\in[0,T]$, T - ixtiyoriy musbat son uchun

$$\left|u(x,t)-u_0(x,t)\right|\le\frac{1}{2}\left|\varphi_0(x+at)-\varphi_0^0(x+at)\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\left|\varphi_0(x-at)-\varphi_0^0(x-at)\right|+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left|\varphi_1(z)-\varphi_1^0(z)\right|dz<$$

$$<\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2a}\delta\int_{x-at}^{x+at}dz=$$

$$=\delta+\delta\frac{1}{2a}2at=\delta(1+t)<\delta(1+T). \qquad (12)$$

Faraz qilaylik, ε ixtiyoriy musbat son va $\delta=\varepsilon/(1+T)$ bo'lsin. U holda (12) tengsizlikdan $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\varepsilon/(1+T)$ son topiladiki, barcha $x\in R$ va $t\in[0,T]$ larda $\left|\varphi_0(x)-\varphi_0^0(x)\right|<\delta$, $\left|\varphi_1(x)-\varphi_1^0(x)\right|<\delta$ shartlar bajarilganda $\left|u(x,t)-u_0(x,t)\right|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bundan, tor tebranish tenglamasi uchun Koshi masalasining yechimi berilganlarga uzluksiz bog'liq ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema. Agar $\varphi_0(x)\in C^2(R^1)$, $\varphi_1(x)\in C^1(R^1)$ bo'lsa, u holda tor tebranish tenglama uchun Koshi masalasining yechimi mavjud, yagona va turg'un bo'ladi, ya'ni (9) − (10) masalaning $u(x,t)$ yechimi (11) formula bilan aniqlanadi. Ma'lum bir masalalarni yechishda $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ funksiyalar teoremaning shartlarini bajarmasligi mumkin. Bunda tor tebranish tenglamasi uchun (9) − (10) Koshi masalasining regulyar yechimi tushunchasini kiritib bo'lmaydi.

4-misol. Ushbu $yu_{xx}-(x+y)u_{xy}+xu_{yy}=0$, $x>0$ tenglamaning $u(x,0)=x^2$, $u_y(x,0)=3x$ shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ regulyar yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani kanonik ko'rinishga keltirib, integrallaymiz. Natijada kanonik tenglamaning umumiy yechimi hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan yechimda x va y o'zgaruvchilarga qaytib, berilgan tenglamaning umumiy yechimni

$$u(x,y)=f_1(x+y)+f_2(x^2+y^2) \tag{13}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu yerda $f_1(x+y)$ va $f_2(x^2+y^2)$ − ixtiyoriy ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar. (13) formuladan va boshlang'ich shartdan foydalanib, f_1 va f_2 funksiyalarni topamiz: $f_1(x)=\frac{3}{2}x^2+f_1(0)$, $f_2(x^2)=-\frac{1}{2}x^2-f_1(0)$.

Topilgan funksiyalarni (13) formulaga qo'yamiz, natijada berilgan masalaning quyidagi

$$u(x,y)=\frac{3}{2}(x+y)^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=x^2+3xy+y^2.$$

yechimiga ega bo'lamiz:

5-misol. Ushbu $2u_{xy}-e^{-x}u_{yy}=4x$ tenglamaning $u(x,y)\big|_{y=x}=x^5\cos x$ $u_y(x,y)\big|_{y=x}=x^2+1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ regulyar yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi $-2dxdy-e^{-x}(dx)^2=0$ bo'lib, u $x=c$, $2y-e^{-x}=c$ yechimlarga ega. Yangi ξ va η o'zgaruvchilar kiritamiz: $\xi=x$ va $\eta=2y-e^{-x}$. U holda tenglama $u_{\xi\eta}=\xi$ kanonik ko'rinishga keladi.

Oxirgi tenglamaning umumiy yechimi $u(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\xi^2\eta+f_1(\xi)+f_2(\eta)$ bo'ladi.

Bundan eski x, y o'zgaruvchilarga o'tsak, berilgan tenglamaning umumiy yechimini $u(x,y)=\frac{1}{2}x^2(2y-e^{-x})+f_1(x)+f_2(2y-e^{-x})$ topamiz, $f_1(x)$ va $f_2(2y-e^{-x})$ − ixtiyoriy funksiyalar. Shartlar yordamida ixtiyoriy funksiyalanir aniqlaymiz:

$f_1(x)+f_2(2x-e^{-x})+\frac{1}{2}x^2(2x-e^{-x})=x^5\cos x$, $2f_2'(2x-e^{-x})+x^2=x^2+1$. Bundan

$f_2(t)=\frac{1}{2}t+f_2(0)$, $\quad f_1(x)=x^5\cos x-x^3+\frac{1}{2}x^2e^{-x}-\frac{1}{2}(2x-e^{-x})-f_2(0)$

bo'ladi. Masalaning yechimini $u(x,y)=x^5\cos x+(y-x)(x^2+1)$ bo'ladi.

Endi ushbu tenglama $-|y|^m u_{xx}+u_{yy}-\frac{m}{2y}u_y=0, \quad m>0$ uchun chegaraviy masala qo'yilishini keltiramiz. $\Omega - x,y$ tekisligida quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsin:

$$\left.\begin{matrix}AC_1\\BC_1\end{matrix}\right\}: \;\; x\mp\frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}}=\mp1, \quad y>0, \qquad \left.\begin{matrix}AC_2\\BC_2\end{matrix}\right\}: \;\; x\mp\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=\mp1, \quad y<0.$$

G masalasi. Ω sohasida berilgan tenglamani

$$u(x,y)=\begin{cases} u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1=\Omega\cap\{y>0\},\\ u_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2=\Omega\cap\{y<0\}.\end{cases}$$

$C\left(\overline{\Omega}_1,\overline{\Omega}_2\right)\cap C^2(\Omega\setminus AB)$ sinfidagi va quyidagi chegara shartlarini qanoatlantiruvchi

$$u_j\left[\theta^{(j)}(x)\right]=\mu_1 u_j\left[\theta^{(j)}_{k_1}(x)\right]+\mu_2 u_j\left[\theta^{(j)}_{k_2}(x)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\mu_1 u_j\left(p_1(x),0\right)-\frac{1}{2}\mu_1 u_j\left(p_2(x),0\right)+\delta_j(x),\ \forall x\in I=AB$$

echimi topilsin. Bu yerda $j=1$ Ω_1 sohadan, $j=2$ esa Ω_2 sohadan olingan,

$$p_1(x)=a_1+b_1x,\ p_2(x)=a_2+b_2x,\ a_i=\frac{2}{k_i+1},\ b_i=\frac{k_i-1}{k_i+1},\ i=1,2$$

va juftlashtirish shartlari

$$\lim_{y\to+0}u_1(x,y)=c\lim_{y\to-0}u_2(x,y),\quad \forall x\in\overline{I},\qquad \lim_{y\to+0}y^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u_1}{\partial y}=\rho(x)\lim_{y\to-0}(-y)^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u_2}{\partial y}+\lambda(x),$$

$$\forall x\in I,\ \theta^{(j)}(x)\left(\theta^{(j)}_{k_1}(x),\ \theta^{(j)}_{k_2}(x)\right),\ \theta^{(j)}(x_0)=\frac{1+x_0}{2}+(-i)^{j-1}\left[\frac{(m+2)(1-x_0)}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta^{(j)}_{k_1}(x_0)=\frac{1+k_1x_0}{1+k_1}+(-i)^{j-1}\left[\frac{(m+2)(1-x_0)}{2(k_1+1)}\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

$$\theta^{(j)}_{k_2}(x_0)=\frac{1+k_2x_0}{1+k_2}+(-i)^{j-1}\left[\frac{(m+2)(1-x_0)}{2(k_2+1)}\right]^{\frac{2}{m+2}}.$$

BC_j xarakteristikaning kesishish nuqtasi affiksi (Ω_j sohasi ichida yotgan chiziq: $x+\left[2k_j/(m+2)\right]|y|^{(m+2)/2}=1$) $M(x_0,0)\in I$; $c=const$, $\mu_1,\mu_2=const$, $\delta_j(x)$, $\rho(x)$, $\lambda(x)$ nuqtadan chiqadigan xarakteristikaning $C^2\left(\overline{I}\right)\cap C^3(I)$, sinfidan berilgan funksiyalari va

$\tau(1)=\tau'(1)=\tau''(1)=0$, $\rho(x)-c\neq 0$, $k_1>k_2>1$, $\delta^{(n)}_j(1)=0$, $\lambda^{(n)}(1)=0$, $n=0,1,2$.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Quyidagi tenglamalarning tipini aniqlang va kanonik ko'rinishga keltiring.

1) $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$; 2) $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$;

3) $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+u_x+u=0$; 4) $u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}-3u_x-15u_y+27x=0$;

5) $u_{xx}-6u_{xy}+10u_{yy}+u_x-3u_y=0$;

2. Quyidagi tenglamalarni tipi o'zgarmaydigan sohada kanonik ko'rinishga keltiring.

1) $u_{xx}-2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}=0$; 2) $3u_{xy}-2u_{xz}-u_{yz}-u=0$;

3) $u_{xx}-4u_{xy}+2u_{xz}+4u_{yy}+u_{zz}+3u_z=0$; 4) $3u_{yy}-2u_{xy}-2u_{yz}+4u=0$

5) $2u_{xx} + 5u_{yy} + 2u_{zz} - 6u_{xy} - 4u_{xz} + 6u_{yz} - 3u + y - 2z = 0$

3. Berilgan tenglamalarni kanonik ko'rinishga keltiring va ularni soddalashtiring.

1) $au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0, \quad a,b,c = const$;

2) $u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma = const$; 3) $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$; 4) $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + 4u_y + u = 0$; 5) $u_{xy} + u_{xx} - u_y - 10u + 4x = 0$.

XULOSA

Ushbu maqola uchinchi va to‘rtinchi kurs talabalarining matematik fizika faniga qiziqishlari, uning amaliy ahamiyati haqida doimiy ravishda savollar berishlari asosida tayorlangan. Bundan tashqari, talabalar to‘lqin tenglamasi uchun Dirixle masalasining nokorrekt ekanligiga va unga doir misollar keltirishga va shu yo‘nalishdagi nazariy bilimlar haqida ma'lumotlarga katta qiziqish bilan qaraydilar. Shu munosabat bilan maqolada mavzu bo‘yicha ma'lumotlarni tizimga solishga va o‘quvchilarga tushunishi oson bo‘ladigan usullar qo‘llashga hamda tanlangan misollar keltirishga harakat qilingan.

Yana shu narsa ma'lumki, talabalar va magistrlarga xususiy hosilali differensial tenglamalar, shu jumladan giperbolik tipga tegishli tenglamalar yechimining yagonaligi va mavjudligini isbotlashga bag‘ishlangan va ularni o‘qitishda ilg‘or pedagogik texnologiyalar bo‘yicha olib borilgan [1-54] ilmiy izlanishlar bilan tanishishni ham tavsiya qilish ijobiy samaralar bermoqda.

Talabalarni o‘z ustlarida ishlashlarini yanada faollashtirish maqsadida mustaqil bajarish uchun bir nechta misollar tavsiya qilingan.

REFERENCES

1. Мирсабуров М. Нелокальная краевая задача для вырождающегося эллиптического уравнения, Дифференциальные уравнения, 38:1 (2002), 129–131.
2. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами, Ташкент, 2005 г., 343 с.
3. Мирсабуров М., Хуррамов Н. «Задача с условием Бицадзе–Самарского на характеристиках одного семейства и общими условиями сопряжения на линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом», Дифф. уравнения, 56:8 (2020), 1073–1094.
4. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
5. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
6. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
7. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
8. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

9. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
10. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
11. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).
12. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning toʻla oʻzgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).
13. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
14. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish boʻyicha ba'zi uslubiy koʻrsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5),
15. Rasulov, X. (2022). Об одной динамическойсистеме с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).
16. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
17. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш тип-даги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).
18. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.
19. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
20. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:9 (2021), p.7-20.
21. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усул-ларни қўлланилиши ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.
22. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
23. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
24. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
25. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
26. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.

27. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
28. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, 4, с.3-7.
29. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
30. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
31. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.
32. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
33. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.
34. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
35. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.
36. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.
37. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
38. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
39. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.
40. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.
41. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.
42. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.145-146.
43. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 y., p.115-116.

44. Расулов Х.Р., Ф.М. Джуракулова (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress. 2:1, 455-462 бетлар.
45. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века. 53:6-1, 2019. С.16-18.
46. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.
47. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. (2022) Ikkita buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptic tenglama uchun chegaraviy masala haqida // Central Asian Academic Journal Of Scientific Research, 2(5), 544-557 b.
48. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
49. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
50. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta'lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g'oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.
51. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
52. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
53. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
54. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).