# ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ, ИХ ИНТЕГРАЛЬНИЕ КРИВЫЕ И ПОТОК

**Ибодов Набижон Музаффарович**
Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Национальный исследовательс-кий университет, Бухарский институт природопользования, ассистент кафедры «Математика и естествознание»
**Насимов Асқар Набижонович**
Учитель математики средней общеобразовательной школы № 2 Гиждуванского района
https://doi.org/10.5281/zenodo.7312487

***Аннотация.*** *Данная статья является результатом исследований операций над интегрируемыми векторными полями на плоскости, а именно: нахождение их интегральных линий, нахождение скобки Ли и нахождение потока.*

***Ключевые слова:*** *Интегральная прямая, векторное поле, поток векторно-го поля, скобка Ли, интегрируемое векторное поле, многообразие, поле, орбита.*

# VECTOR FIELDS, THEIR INTEGRAL CURVES AND THE FLOW

***Abstract.*** *This article is the result of research on operations on integrable vector fields in the plane, namely: finding their integral lines, finding the Lie bracket and finding the flow.*

***Keywords:*** *Integral line, vector field, vector field flow, Lie bracket, integrable vector field, manifold, field, orbit.*

## ВВЕДЕНИЕ

**Определение-1.** Пусть $M$-гладкое многообразие размерности **n,** $\mathbf{T_xM}$ – каса-тельное пространство в точке $x \in M$. Отображение $P$, ставящее каждое точке $x \in M$ некоторое подпространство $P(x) \subset T_xM$, называется распределением. Если $dimP(x) = k$ для всех $x \in M$, то $P$ называется $k-$мерным распределением.

**Определение-2.** Распределение $P$ называется гладким, если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность этой точки $U(x)$,и гладкие векторные поля $X_1, X_2,\ ,X_m$ заданные на $U(x)$ такие, что векторы $X_1(y)$, $X_2(y)$, , $X_m(y)$ образуют базис для подпространства $P(y)$ для каждого $y \in U(x)$.

**Определение-3.** Распределение $P$ называется вполне интегрируемым, если для каждой точки $x \in M$ существует связное подмногообразие $Nx$ многообразия $M$, содержащее точку $x$ такое, что $T_yN_x = P(y)$ для всех $y \in N_x$.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Подмногообразие $N_x$ называется интегральным подмногообразием распре-деления $P$.

Если дано семейство $D$ гладких векторных полей, то естественным образом возникает гладкое распределение. Действительно, если $D$ состоит из гладких векторных полей, то для каждой точки $x \in M$ множество векторов $D(x) =\{X(x) : X \in D\}$ порождает некоторое подпространство $P_D(x)$ касательного пространства $T_xM$. Разумеется, размерности подпространство $P_D(x)$ могут меняться от точки к точке. Это распределение обозначим через $P_D$.

Говорят, что векторное поле X принадлежит распределению $P$, если $X(x) \in P(x)$ для всех $x \in M$.

Напомним, что распределение $P$ на многообразии $M$ называется инволютив-ным, если $X, Y \in P$, то имеет место $[X, Y] \in P$.

**РЕЗУЛЬТАТЫ**

Необходимое и достаточное условие вполне интегрируемости распределения постоянной размерности дано в теореме Фробениуса [1-3].

**Теорема Фробениуса.** Для того, чтобы распределение $P$ было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было инволютивным.

**Определение-4.** Семейство векторных полей $D$ называется вполне интег-рируемым, если соответствующее распределение $P_D$, порожденное $D$, является вполне интегрируемым.

Отметим, что если семейство $D$ состоит из одного векторного поля, то оно всег-да вполне интегрируемо, так как по теореме о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений через каждую точку проходит единственная интегральная кривая векторного поля. Если семейство состоит из более чем одного векторного поля, то оно не всегда вполне интегрируемо.

Теорема Фробениуса обобщенная Херманном для распределений непостоян-ной размерности, дает необходимое и достаточное условие для вполне интег-рируемости семейства векторных полей, состоящее из конечного числа вектор-ных полей [1].

**Теорем (Hermann).** Пусть $D = \{X_1, X_2, ..., X_k\}-$ семейство конечного числа векторных полей на многообразии $M$. Семейство $D$ вполне интегрируемо, тогда и только тогда, когда оно инволютивно.

Инволютивность семейства векторных полей $D = \{X_1, X_2, . . . , X_k\}$ означает следующее: для любых векторных полей $X, Y \in D$ существуют гладкие функции $f^l(x)$, $x \in M$, $l = 1, . . . , k$ такие, что

$$[X, Y] = \sum_{l=1}^{k} f^{\,l}(x) X_l$$

В случае, когда семейство состоит из бесконечного числа векторных полей, как показывает существующие примеры, эта теорема неверна. Нами доказана следующая теорема.

**Теорема.** Пусть $M = R^3-$евклидово пространство с декартовыми координата-ми $x, y, z$. Семейство $D$, состоящее из векторных полей

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\,, Y = \frac{\partial}{\partial z},$$

порождает вполне интегрируемое распределение, интегральными многообра-зиями которого являются гиперболические цилиндры, полуплоскости и прямая.

**ОБСУЖДЕНИЕ**

**Пример**. Для функции

$$H(\mathrm{x,y,z}) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{5}$$

соответствующее гамильтоново векторное поле имеет следующий вид $H_x = \dfrac{x}{2}$ $\qquad H_y = \dfrac{2y}{3}$

Соответствующая гамильтонова система имеет следующий вид

$$X_H = H_x \frac{\partial}{\partial y} - H_y \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow X_H = \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{2y}{3}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_H = \left\{-\frac{2y}{3}, \frac{x}{2}, 0\right\}$$

$$Y = \{4y, -3x, 0\}$$

$$[X_H, Y]^i = \sum_{j=1}^{3}\left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)$$

$$[X_H, Y]^1 = 0 \qquad [X_H, Y]^2 = 0 \qquad [X_H, Y]^3 = 0$$

$$[X_H, Y] = 0 \qquad X_H = \left\{-\frac{2y}{3}, \frac{x}{2}, 0\right\}$$

$$x(0) = x_0 \;\; y(0) = y_0 \;\; z(0) = z_0$$

траекториями которой являются окружности: $\begin{cases} x = x^0 \cos 2\sqrt{3}t + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot y^0 \sin 2\sqrt{3}t \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} x^0 \sin 2\sqrt{3}t + y^0 \cos 2\sqrt{3}t \\ z = 0 \end{cases}$

Поток векторного поля: $\begin{cases} x = x \cos 2\sqrt{3}t + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot y \sin 2\sqrt{3}t \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} x \sin 2\sqrt{3}t + y \cos 2\sqrt{3}t \\ z = 0 \end{cases}$

**ВЫВОДЫ**

**Теорема.** Пусть $v_1, v_2, ..., v_r$ -гладкие векторные поля на многообразии M. Тогда система $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ интегрируема, если и только если она находится в инволюции.

**REFERENCES**

1. Олвер, П.Ж. Апплисатионсоф Лие Групс то Дифференциал Экуатионс. Спрингер,1993.
2. Гольдфан И.А Векторны анализ и теория поляю. –М.:Наука, 1968.
3. Азамов А.А.,Нарманов А. Я. О предельных множествах орбит систем векторных полей. Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, №2, С.
4. *A.Y. Narmanov, A. S. Sharipov, J. O. Aslonov Differensial geometriya va topologiya kursidan masalalar to'plami, T:Universitet, 2014 yil.*
5. *Катанаев М.О. Геометрические методы в математической физике, Математический институт имени и. А. Стеклова РАН, май 2010, 553 с.*
6. *Аслонов Ж.О. Геометрия орбит векторных полей Киллинга. УзМЖ –Ташкент, 2011. – С.*