FUNKSIYANING LIMITI TUSHUNCHASI

Malika Farmonova
Navoiy shahar 17-umumta'lim maktabi matematika fani o'qituvchisi

https://doi.org/10.5281/zenodo.7227410

Annotatsiya. *Maqolada matematika fanida qo'llaniladigan limitlar tushunchasi haqida malumotlar berilgan. Limitlar nazariyasi, funksiya limiti, Geyne tarifi, Koshi tariflari haqida ma'lumotlar misollar orqali tushuntirib berilgan.*

Kalit so'zlar: *Chegara, limit, funksiya limiti, o'zgarmas son, funksiya, Koshi ta'rifi, qiymat.*

ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Аннотация. *В статье представлена информация о понятии пределов, используемом в математике. Информация о теории пределов, предельных функциях, норме Гейне, норме Коши поясняется примерами.*

Ключевые слова: *Лимит, лимит, лимит функции, постоянное число, функция, тариф Кожи, стоимость.*

THE CONCEPT OF THE LIMIT OF A FUNCTION

Abstract. *The article provides information about the concept of limits used in mathematics. Information about the theory of limits, function limit, Heine rate, Cauchy rate is explained by examples.*

Keywords: *Limit, limit, function limit, constant number, function, Skin rate, cost.*

KIRISH

Intuitiv darajadagi «chegara» tushunchasi XVII asrning ikkinchi yarmida ham ingliz fizigi, matematigi va astronomi Isaak Nyuton tomonidan ishlatilgan (1642-1727), shuningdek unga, XVIII asr matematigi Leonard Eyler (1707 -1783) va fransuz matematigi, astronomi va mexaniki Jozef Lui Lagranj (1736 - 1813)lar asos solishgan. Birinchilardan bo'lib ketma-ketlik chegarasining qat'iy ta'riflari 1816-yilda matematik, faylasuf, ilohiyotchi Bernard Bolzano (1781 - 1848) va 1821-yilda fransuz matematik Avgustin Lui Koshi (1789 - 1857) tomonidan berilgan.

TADQIQOT MATERIALLARI VA METODOLOGIYASI

Limitlar nazariyasi iqtisodiy hisob-kitoblarda juda faol qo'llaniladi.

1-Ta'rif uzluksiz bo'lgan isbot va hisob-kitoblarda agar **b** nuqtaning har qanday **ε** atrofida doimo **a** nuqtaning shunday **δ** atrofi topilsaki, unda **x** argumentning ana shu atrofga tegishli istalgan qiymati uchun $f(x)$ funksiyaning qiymati **b** nuqtaning **ε** atrofiga tegishli bo'lsa, **x** o'zgaruvchi **a** ga intilganda **b** son $f(x)$ **funksiyaning limiti** deyiladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ kabi belgilanadi.

2-Ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilsaki, $0<|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan istalgan x uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A soni $x\to a$ da $f(x)$ **funksiyaning limiti** deyiladi va bunday belgilanadi: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Agar har bir $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $0 < |x-a| < \delta$ bajarilganda $|f(x) - A| < \varepsilon$ ham bajarilsa, x argument a ga intilganda funksiya A songa teng limitga ega deyiladi va quyidagicha ifodalanadi: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning limiti qaralayotgan a nuqta funksiyaning aniqlanish sohasiga kirishi yoki kirmasligi ham mumkin. Funksiyaning a nuqtadagi limiti topilganda $x \neq a$ deb qaraladi. Funksiyaning limiti δ, ε va a larga bog'liq bo'ladi. Bunda quyidagi uch holni qarab o'tamiz:

1. $a = \infty$ va A - chekli.
2. a - chekli va $A \to \infty$.
3. $a = \infty$ va $A = \infty$.

Endi bu hollar uchun funksiya limitiga ta'riflar beramiz.

1.Oldindan berilgan har qanday cheksiz kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday Δ son topilsaki, $|x| > \Delta$ bo'lganda $|f(x) - A| < \varepsilon$ bo'lsin:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

2.Oldindan berilgan har qanday istalgancha katta $E > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $|x-a| < \delta$ bo'lganda $|f(x)| > E$ bo'lsin:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

3.Oldindan berilgan har qanday istalgancha katta $E > 0$ son uchun shunday $\Delta > 0$ son topilsaki, $|x| > \Delta$ bo'lganda $|f(x)| > E$ kelib chiqsin: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

TADQIQOT NATIJALARI

Funksiya limiti ta'rifidan foydalanib, quyida funksiyalar limitlarini topamiz.

1-misol. O'zgarmas sonning limiti shu sonning o'ziga tengligini isbotlang.

Isboti: Faraz qilaylik, $f(x) = c$ berilgan bo'lsin. U holda, har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ tengsizlik hosil bo'ladi. Xulosa qilib aytish mumkinki, ixtiyoriy a uchun $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} c = c$.

2-misol. $f(x) = x$ berilgan bo'lsa, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$ ekanligini isbotlang.

Isboti: Faraz qilaylik, $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy haqiqiy son bo'lsin. Quyidagi modulni yozamiz: $|f(x) - a| = |x - a|$.

Agar $\delta=\varepsilon$ deb olsak, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday x uchun $|f(x)-a|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi, ya'ni $|x-a|<\varepsilon$ va funksiyaning nuqtadagi limitining ta'rifiga asosan quyidagi natijaga kelamiz: $\lim\limits_{x\to a} x=a$.

3-misol. Funksiya limitining ta'rifidan foydalanib, $\lim\limits_{x\to 1}(2x-4)=-2$ ni isbot qiling.

Isboti: Funksiya limitining ta'rifiga asosan, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun biror $\delta>0$ son topilib, $|x-1|<\delta$ bo'lganda $|f(x)-(-2)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilishi kerak, ya'ni: $|2x-4-(-2)|=|2x-2|=2|x-1|<\varepsilon$. Ushbu tengsizlik δ ni qanday tanlaganda bajarilishini topamiz. Oxirgi tengsizlikdan ko'rinadiki, $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}=\delta$ bajarilsa, $|f(x)+2|<\varepsilon$ tengsizlik ham bajariladi.

Demak, $\lim\limits_{x\to 1}(2x-4)=-2$.

3-ta'rif. Agar ∀ E>0 son uchun shunday δ>0 son topilsaki, x argumentning 0<|x-a|<δ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

|f(x)|>E (f(x)>E; -f(x>E))

tengsizlik bajarilsa, f(x) funksiyaning a nuqtadagi limiti ∞ x(+ ∞, -∞) deyiladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty\right)$ kabi belgilanadi.

MUHOKAMA

Misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$ bo'linishini ko'rsating.

Yechilishi: Agar ∀ E>0 son uchun $\delta=\dfrac{1}{\sqrt[3]{E}}$ deb olinsa, u holda 0<|x-1|<δ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{(x-1)^3}\right|>E$ tengsizlik bajariladi. Demak, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^3}=\infty$.

Endi, f(x) funksiyaning a nuqtadagi o'ng va chap limtilari tushunchalarini keltiramiz.

X={x} haqiqiy sonlar to'plami berilgan bo'lib, a nuqta uning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin. Shu to'plamda f(x) funksiya aniqlangan.

4-ta'rif (Geyne ta'rifi): Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va har bir hadi a dan katta (kichik) bo'lib a ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham mos $\{f(x_n)\}$ hamma vaqt yagona b ga intilsa, shu b ni f(x) **funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti** deb ataladi.

5-ta'rif (Koshi ta'rifi): Agar ∀ x va ε>0 son uchun shunday δ=δ(ε, x) son topilsaki, argument x ning a<x<a+δ (a-δ<x<a) tengsizliklarini qanoatlantiruvchi barcha x∈ X

qiymatlarida |f(x)-b|<ε tengsizlik bajarilsa, b son f(x) **funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti** deb ataladi.

Funksiyaning o'ng (chap) limitlari quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \qquad ёки \qquad f(a+0) = b$$

$$\left(\lim_{x\to a-0} f(x) = b \qquad ёки \qquad f(a-0) = b\right)$$

4-misol. Ushbu $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $(x \neq 0)$ funksiyaning nol nuqtadagi o'ng va chap limitlarini toping.

Nolga intiluvchi turli $\{x_n'\}$ va $\{x_n''\}$ ketma-ketliklarni olaylik. Faraz qilaylik, $\{x_n'\}$ ketma-ketlik 0 nuqtaga o'ngdan, $\{x_n''\}$ esa 0 nuqtaga chapdan intilsin. U holda bu ketma-ketliklar uchun

$$f(x_n') = \frac{|x_n'|}{x_n'}, \qquad f(x_n'') = \frac{|x_n''|}{x_n''},$$

bo'lib, sonning absolyut qiymati ta'rifiga ko'ra

$$f(x_n') = \frac{x_n'}{x_n'} = 1 \qquad f(x_n'') = -\frac{x_n''}{x_n''} = -1$$

Demak,

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \frac{|x|}{x} = -1$$

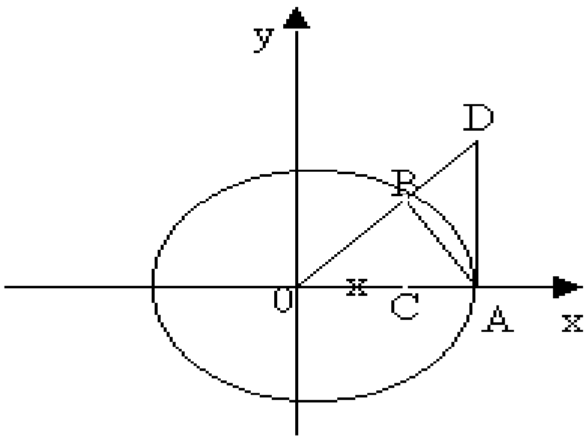
XULOSA

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ isboti. Bu limitni o'rinli ekanligini ko'rsatish uchun radiusi R ga teng bo'lgan aylana olamiz. OA qo'zg'almas radius bo'lsin. OV esa qo'zg'aluvchi radius bo'lsin. ∠AOV=x bo'lib, $0<x<\frac{\pi}{2}$. V nuqtadan OA radiusga S nuqtani tik tushiramiz. Aylanaga A nuqtadan urinma o'tkazamiz. OV ni urinma bilan kesishish nuqtasi D bo'lsin. V va A nuqtalarni tushiramiz, natijada AV vatar hosil bo'ladi. Shakldan $S_{\Delta OAV}<S_{sekOAV}<S_{\Delta AOD}$ (1)

$$\frac{AO\cdot BC}{2} < \frac{AO}{2}AB < \frac{AO\cdot AD}{2} \Rightarrow (BC<AB<AD) \Rightarrow \frac{BC}{AO} < \frac{AB}{AO} < \frac{AD}{AO} \qquad (2)$$

(1) va (2) larga ko'ra Δ OAV sinx<x<tgx o'rinli bo'ladi.

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad |: \quad \sin x \neq 0$$



$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ $0<x<\frac{\pi}{2}$,

$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$, $-1<-\frac{\sin x}{x}<-\cos x$,

$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x$ $\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x}{2}<x$

$0<1-\frac{\sin x}{x}<x$, shuning uchun $x\to 0$ da $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

5-misol: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}=5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5$

6-misol. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$ limitni hisoblang

Yechish. $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka egamiz.

Agar $\frac{\pi}{2}-x=z$ desak, u holda $x\to\frac{\pi}{2}$ da $z\to 0$ bo‘ladi.

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\pi-\pi+2z}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{2}=\frac{1}{2}$$

REFERENCES

1. Azlarov T „ Mansurov H. Matematik analiz, 2-qism. Toshkent, « O‘zbekiston», 1995;
2. Azlarov T., Mansurov H. Matemalik analiz asoslari, l-qism, Toshkent, 2005;
3. Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz, I -qism. Toshkent, « O‘qituvchi», 1994;
4. Sa’dullayev A. Mansurov X. Xudoyberdiyev G. Vorisov A. Gulomov R
5. “Matematika analiz kursidan misol va masalar to‘plami” T. I, II Toshkent, “O‘zbekiston” 1993, 1995

6. Farmonova M.D. “Umumiy o‘rta ta’lim maktablari va akademik litseylarda funksiya limiti mavzusini o‘rganish bo‘yicha mulohazalar” mavzusida yozilgan dissertatsiyasi
7. http://ega-math.narod.ru/Halmos/htm. Xalqaro matematika sayti
8. http://mathematica.ru Matematika haqida sayt
9. http://www.edu.uz O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim
10. Vazirligi portali
11. http://www.nuu.uz O‘zbekiston Milliy Universiteti sayti
12. http://www.nspi.uz Navoiy Davlat pedagogika instituti sayti
13. Шаропов, Б. Х., Хакимов, С. Р., & Рахимова, С. (2021). Оптимизация режимов гелиотеплохимической обработки золоцементных композиций. *Матрица научного познания*, (12-1), 115-123.
14. Yuvmitov, A., & Hakimov, S. R. (2021). Influence of seismic isolation on the stress-strain state of buildings. *Acta of Turin Polytechnic University in Tashkent*, *11*(1), 71-79.
15. Ювмитов, А. С., & Хакимов, С. Р. (2020). ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СЕЙСМОИЗОЛЯЦИИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗДАНИЯ. *Acta of Turin Polytechnic University in Tashkent*, *10*(2), 14.