ИНТЕРАКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ ТЕМЫ «ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»

Хамроев Насилло Шарифович
Бухарский филиал Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства

https://doi.org/10.5281/zenodo.7110408

Аннотация. *В статье дается методические советы при преподавании темы двойные интегралы и их вычисления. Дано краткое описание интерактивного метода «Рыбий скелет» и указаны пути вычисления двойных интегралов с помошью метода. Анализируются преимущества и недостатки. Кроме того, приведены решение несколько типичных примеров. Для упрощения понимания пути решение примеров для визуальности построены области интегрирования. Изложены отношения студентов к преподавание темы по данной методике.*

Ключевые слова: *интерактивные методы, двойные интегралы, преимущества, недостатки, «рыбий скелет», область интегрирования, квадрируемая область, квадрируемые части, интегральная сумма, аддитивность, определенный интеграл, двойной интеграл, отображение области, координаты точки, криволинейные координаты.*

INTERACTIVE METHODS IN TEACHING THE TOPIC «DOUBLE INTEGRALS»

Abstract. *The article gives methodological advice when teaching the topic of multiple integrals and their calculation. A brief description of the interactive method «Skeleton of Fish» is given and ways to calculate multiple integrals using the method are indicated. The advantages and disadvantages are analyzed. In addition, a few typical examples are given. To simplify the understanding of the solution path of the examples, integration domains are constructed. The attitudes of students to the teaching of the topic by this method are outlined.*

Keywords: *interactive methods, multiple integrals, advantages, disadvantages, fishbone, integration domain, squaring domain, squaring parts, integral sum, additivity, definite integral, double integral, domain display, point coordinates, curvilinear coordinates.*

ВВЕДЕНИЕ

Практика показывает, что студенты при решения задачи по вычисление двойных интегралов сталкиваются трудностями. Основные ошибки и непонятое заключаются в определении и установлении пределов интегралов. Поэтому схемы преподавание данной темы будем проводить в следующем порядке (все отражаются в статьи): - будет дана краткая информация об интерактивном методе «рыбий скелет»; - по традиционной методике излагается теоретическая информация по теме; - приводятся решения типичных примеров; - для решения практических примеров используется метод «рыбий скелет»; предлагается контрольные вопросы для закрепления темы; - области интегрирования нарисуются при решении примеров.

Следует сказать, что использование данной схемы в обучении предмета было положительно оценено студентами. Им отмечено, что понять темы не составило трудности. Некоторые студенты заинтересовались математикой и опубликовали ряд научных работ в соавторстве со своими научными руководителями [1-16].

Метод «рыбьего скелета» позволяет описать и решить ряд задач. Развивает навыки системного мышления, структурирования и анализа. В начале преподаватель знакомит студентов с правилом заполнения рисунка и делит их на отдельные малые группы. Верхняя «кость» рыбы представляет собой проблему, а в нижней части студенты приводят доказательства или ответ задачи, подтверждающие наличие этой проблемы. Маленькие группы объединяют, сравнивают и завершают рисунок. Они сделают общий чертеж и представят результаты работы.

Применяется следующая стратегия:

1. На листе белой бумаги (ватман или лист формата А-3) рисуется скелет рыбы (голова, хрящи, ребра).

2. На верхней «косточке» выражается проблема или задача, а на нижней - пишутся факты, доказывающие наличие этой проблемы или ответы задачи (или пути ее решения, в зависимости от цели, поставленной учителем).

3. Презентация готовой схемы.

Напишем сферы использования: в естественных и конкретных науках при использовании проблемного метода обучения.

Преимущества метода. Эта схема отражает взаимозависимость проблем, их комплексные особенности. Недостатки метода. Могут возникнуть трудности с формулированием проблем.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Пусть G — квадрируемая (и, следовательно, ограниченная) область (открытая или замкнутая) на плоскости и пусть в области G определена ограниченная функция $u = f(\mathrm{M}) = f(x,y)$. Разобьем область G на n квадрируемых частей $G_i = (i = 1,2,3,\dots n)$ так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек, в каждой части G_i возьмем произвольную точку $M_i(\varepsilon_i,\eta_i)$ и составим сумму

$$I(G_i,M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\Delta s_i,$$

где Δs_i— площадь G_i.

Эта сумма называется интегральной суммой функции $f(x,y)$, соответствующей данному разбиению области G на части G_i и данному выбору промежуточных точек M_i.

Диаметром ограниченного множества G точек назовем точную верхнюю грань расстояний между двумя произвольными точками этого множества: $\sup_{M'\in G, M''\in G} \rho(M',M'')$.

Пусть d_i— диаметр области G_i и

$$d = \max_{1\le i\le n} d_i.$$

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм $I(G_i,M_i)$ при $d \to 0$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что для любого разбиения области G, у которого $d < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек M_i выполняется неравенство

$$|I(G_i,M_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует

$$\lim_{d\to 0} I(G_i,M_i) = I,$$

то он называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается

$$\iint f(x,y)dxdy \text{ или } \iint f(M)ds,$$

а функция $f(x,y)$ называется интегрируемой в области G. Имеет место следующие теоремы.

Теорема 1. Функция, непрерывная в замкнутой квадрируемой области, интегрируема в этой области.

Теорема 2. Функция, ограниченная в квадрируемой области и непрерывная всюду, кроме некоторого множества точек площадью нуль, интегрируема в этой области.

Отметим, что двойные интегралы обладают такими же свойствами, как и определенные интегралы (линейность, аддитивность, формулы среднего значения и т.д.).

В дальнейшем важным элементом является приведение некоторые методы интегрирование двойных интегралов (хотя бы формально).

Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint_G f(x,y)dxdy.$$

Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе переменных x и y к новым переменным u и v по формулам: $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, $(u,v)\in g$. При этом каждая точка (x,y) области G соответствует некоторой точке (u,v) области g, а каждая точка (u,v) области g переходит в некоторую точку (x,y) обалсти G (рис. 1).

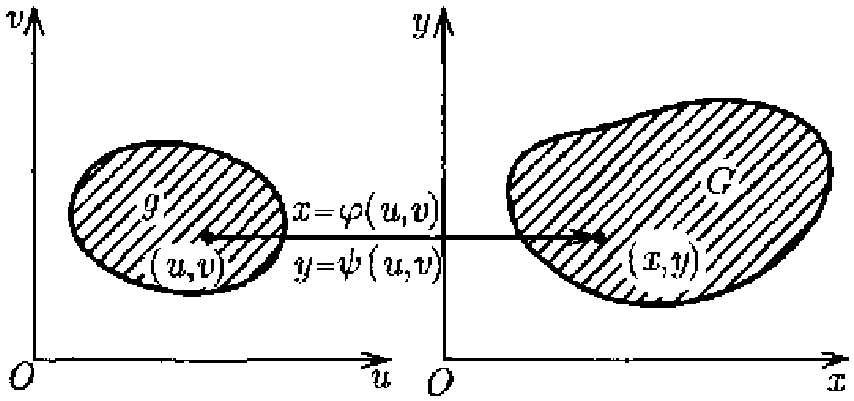


Рис. 1

Когда точка (u,v) «пробегает» область g, соответствующая ей точка $(x,y)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ «пробегает» область G. Область G называется образом области g, а область g — прообразом области G при отображении.

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_G f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv.$$

Это формула называется формулой замены переменных в двойном интеграле.

Другим примером криволинейных координат являются полярные координаты (ρ,φ), связанные с прямоугольными координатами (x,y) формулами:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$$
$$(0\le\rho<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi).$$

Иногда в качестве промежутка изменения φ берётся промежуток $-\pi < \varphi \leq \pi$. Якобиан перехода к полярным координатам имеет вид:

$$\frac{D(x.y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Геометрические приложения двойных интегралов. а) площадь S квадрируемой области G на плоскости (x,y) выражается формулой:

$$S = \iint_G dxdy.$$

Если

$$G = \{(x,y): a \leq x \leq b, \qquad 0 < +y \leq f(x)\} -$$

криволинейная трапеция, то, сведя двойной интеграл к повторному, придём к известному выражению площади криволинейной трапеции с помощью определённого интеграла:

$$S = \iint_F dxdy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b y|_0^{f(x)} dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Переходя к новым переменным по формулам, получим выражение площади области G в криволинейных координатах:

$$S = \iint_g \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.$$

Если $G-$ криволинейный сектор на плоскости (x,y), ограниченный лучами $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где ρ и φ $-$полярные координаты (рис. 2),

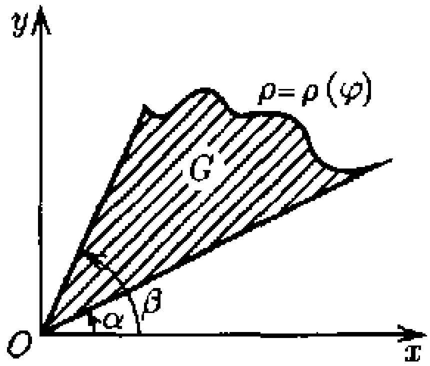


Рис. 2

то, учитывая, что $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \rho$, а $g = \{(\rho,\varphi): \alpha \leq \varphi \leq \beta,\ 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$, и сводя двойной интеграл к повторному, получаем известное выражение площади криволинейного сектора через определённый интеграл:

$$S = \iint_G dxdy = \iint_g \rho d\rho d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho = \int_\alpha^\beta \left[\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^{\rho(\varphi)}\right] d\varphi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

б) Объём V тела $T=\{(x,y,z):(x,y)\in G,\ 0\le z\le f(x,y)\}$ (рис. 3),

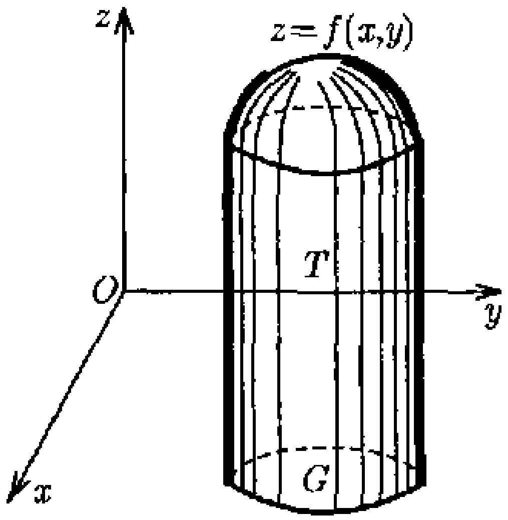


Рис. 3

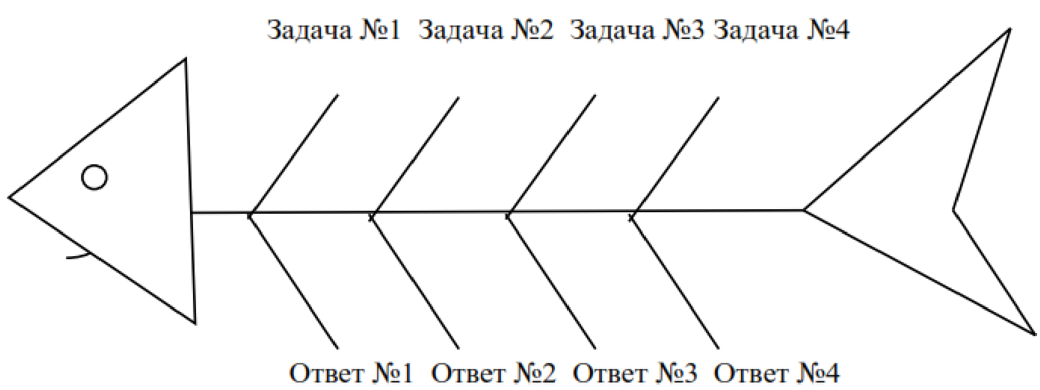
где G –квадрируемая замкнутая область, а $f(x,y)$ –непрерывная неотрицательная в области G функция, выражается формулой:

$$V=\iint\limits_{G} f(x,y)\,dxdy.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ

Метод «Рыбий скелет» дает возможность выразить весь масштаб проблемы и найти ее решение. Формирует у студентам навыки систематического, творческого, аналитического наблюдения. Данная технология направлена на максимально подробное изучение сложных, многогранных, проблемных тем. Ниже приведен пример использования метода «Рыбий скелет». Чтобы вычислять двойных интегралов, мы укажем способы их вычисления (построение области интегрирование).

Для этого, дадим краткое изложение теоретической части темы.



Пример.

Задача №1. Вычислить двойной интеграл $\iint_G (x+y^2)\,dxdy$ по области G, ограниченной кривыми: $y=x$ и $y=x^2$.

Ответ №1. Область G изображена на рис. 4.

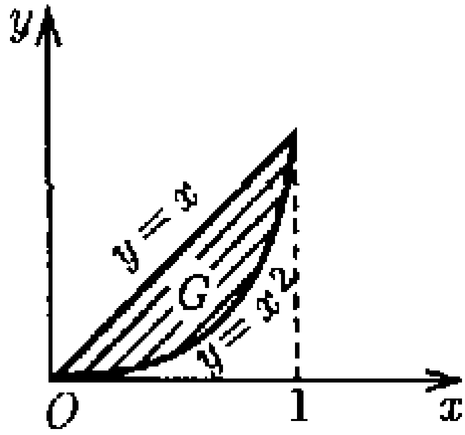


Рис. 4

Сводим двойной интеграл к повторному следующим образом:

$$\iint_G (x+y^2)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x+y^2)\,dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_{x^2}^{x} (x+y^2)\,dy = \left(xy+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{x^2}^{x} = x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^6.$$

Теперь вычисляем повторный интеграл:

$$\int_0^1 \left(x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{3}x^6\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{21}x^7\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{42}.$$

Задача №2. Вычислить двойной интеграл $I=\iint_G x^2y^2\,dxdy$, где $G=\{(x,y): 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$.

Ответ №2. Область G представляет собой кольцо (рис. 5, *а*)).

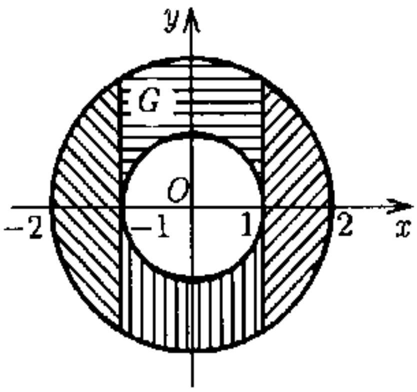


Рис. 5, а)

Его можно разбить на трапециевидные части, к которым применима формула сведения двойного интеграла к повторному, например, так, как показано на рис. 5, а). Однако удобнее сделать замену переменных – перейти к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. При этом отображении прообразом кольца является прямоугольник $g = \{(\rho,\varphi): 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ (рис. 5, *б*).

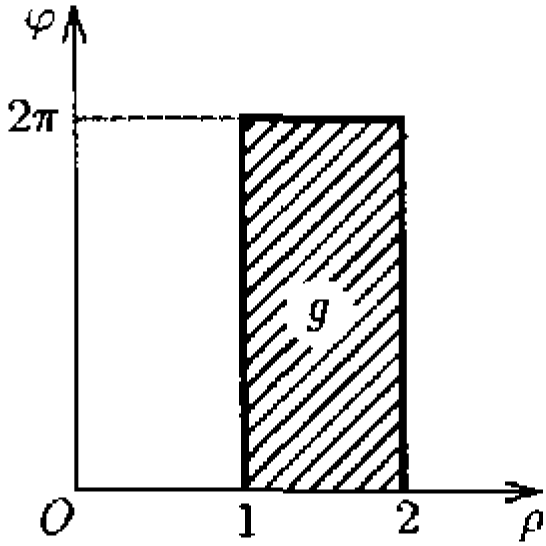


Рис. 5, б)

Применяя формулу и сводя двойной интеграл к повторному, получаем:

$$I = \int_2^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^5 \sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi = \int_1^2 \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} 4\varphi = \frac{63}{6}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{21\pi}{8}.$$

Задача №3. Найти площадь фигуры G, ограниченной кривой

$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = 4xy,\ (a > 0,\quad b > 0).$

Ответ №3. Так как левая часть уравнения кривой неотрицательна при любых x и y, то и правая часть должна быть неотрицательной, а значит x и y должны иметь одинаковые знаки. Следовательно, кривая расположена в I и III квадрантах, причём она симметрична относительно начала координат.

В самом деле, если точка $M(x, y)$ лежит на кривой, т.е. x и y удовлетворяют данную уравнению, то $-x$ и $-y$ также удовлетворяют этому уравнению, т.е. точка $M'(-x,-y)$, симметричная точке M относительно начала координат, также лежит на кривой. Поэтому и вся фигура G состоит из двух частей, симметричных друг другу относительно начала координат.

Найдём площадь S_1 части фигуры, расположенной в I квадранте. Для этого удобно перейти к новым переменным – обобщённым полярным координатам. Они вводятся по формулам:

$$x - x_0 = a\rho^\beta \cos^\alpha\varphi,$$
$$y - y_0 = b\rho^\beta \sin^\alpha\varphi,$$

где x_0, y_0, a, b, α, β- некоторые числа, выбираемые в каждом конкретном случае из соображений удобства.

Якобиан отображения равен $ab\alpha\beta\rho^{2\beta-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi$.

В данном случае удобно взять $x_0 = y_0 = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Тогда левая часть данного уравнения будет равна ρ^4 и уравнение примет вид $\rho^4 = 4\,ab\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$, откуда $\rho = 0$ или $\rho = 2\sqrt{ab}\sin\varphi\cos\varphi$ $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$ (I квадрант).

Кривые $\rho = 0$ и $\rho = 2\sqrt{ab}\sin\varphi\cos\varphi$ $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$ на плоскости (ρ, φ) ограничивают область g - прообраз части фигуры G лежащей в I квадранте. Якобиан отображения в данном случае равен $2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi$.

По формуле получаем

$$S_1 = \iint_g 2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi \; d\rho\, d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{ab}\sin\varphi\cos\varphi} 2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi \; d\rho =$$

$$4a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$4a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi(1-\sin^2\varphi)\, d(sin\varphi) = \frac{a^2b^2}{3}.$$

Искомая площадь фигуры G равна $2S_1$, т.е. $\frac{2a^2b^2}{3}$.

Задача №4. Найти объем тела Т, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$.

Ответ №4. Данное тело можно представить в виде $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, 0 \le z \le x^2 + y^2\}$, где G - область на плоскости (x, y), ограниченная кривыми $y = x^2$и $y = 1$, т. е. $G = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$, Применяя формулу

$$V = \iint_G f(x, y)\, dxdy$$

и сводя двойной интеграл к повторному, получим

$$V = \iint_G (x^2 + y^2)dx\, dy =$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)dy =$$

$$\int_{-1}^{1}\left[x^2(1-x^2) + \frac{1}{3}(1-x^6)dx\right] = \frac{88}{105}.$$

ОБСУЖДЕНИЕ

С помощью этого метода студенты учатся мыслить независимо, широко, творчески и критически. Эта технология демонстрируется через рисование модели рыбы, в которой студенты пытаются полностью раскрыть проблему.

ВЫВОДЫ

Отметим, что приведенные задачи №1-4 предназначены для более способным и одаренным студентам. Вместо приведенных задач №1-4, можно взять следующие вопросы (для средних групп) и соответствующих ответов.

Задача № 1. Дайте определение предела интегральных сумм и двойного интеграла.

Задача № 2. Что такое криволинейные координаты? Изобразите на плоскости (x, y) координатные линии полярных координат ρ и φ.

Задача № 3. Напишите формулы для вычисления площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла.

Задача № 4. Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.

Известно, что в настоящее время руководством страны придается большое значение сфере образования и подписан ряд постановлений. Основой обеспечения реализации решений, безусловно, является обучение студентов науке с использованием передовых педагогических технологий. В этом направлении проведен ряд научных исследований [16-21]. Наметим, что изучаемая нами тема «Двойные интегралы и ее приложения» широко применяется в научных исследованиях [22-52].

При опросе студентов, всегда получены положительные отзывы, что дополнительные изучение ими научных результатов и подготовка теоретической информации служила для пробуждения интереса их к математике.

REFERENCES

1. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:9 (2021), p.7-20.
2. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p. 586-595.
3. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.596-607.
4. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
5. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.
6. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.

7. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
8. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
9. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.
10. Хамроев Н.Ш., Дусткараев А.Н., Рустамов Э.Т. Вопросы моделирования сложных технических поверхностей по касательным кривого 2-го порядка // Техника и технологии: пути инновационного развития: Сборник научных трудов 9-й Международной научно-практической конференции (30 июня 2020 года**)** Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2020, Том 1, **с.** 166-169.
11. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.
12. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning to'la o'zgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).
13. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
14. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.
15. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
16. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta'limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5)
17. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
18. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo'yicha ba'zi uslubiy ko'rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
19. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.
20. Хамроев Н.Ш. Иккинчитартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган оддий дифференциал тенгламалар ва уларни ечиш методикаси ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.141-153.
21. Хамроев Н.Ш. Иккинчи тартибли оддий дифференицал тенгламалар учун чегаравий масалаларни Грин функцияси ёрдамида ечиш йўллари // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.154-167.
22. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.

23. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
24. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
25. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
26. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
27. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
28. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
29. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
30. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
31. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
32. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
33. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
34. Жураев Т. Х.,Хамраев Н.Ш., Сувонов О. Ш., Сапаров Х. Р. Разработка концепции силлабуса для учебного процесса геометро-графических дисциплин // Образование и проблемы развития общества. 2020. №3 (12).
35. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем: о динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
36. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
37. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип: об одной задаче для вырождающеюся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
38. Rasulov, R. X. R. (2022). A quasilinear diffusive logistic equation with free boundary. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
39. Rasulov, R. X. R. (2022). Ikkita buzilish chizig’iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
40. Жураев Т.Х., Хамраев Н.Ш., Ураков О.Х., Абдуманнонов М., Саидова Г.К. Решение краевой задачи построения плоских сопряжений геометрическим моделированием для направляющих поверхностей рабочих органов

\\ В сборнике: Эффективность применения инновационных технологий и техники в сельском и водном хозяйстве. Сборник научных трудов международной научно-практической онлайн конференции, посвященной 10-летию образования Бухарского филиала Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства. 2020 г., с. 346-348.

41. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
42. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
43. Sobirov K.N., Hamroev N.SH., Khamroyev G.F. prospects for the development of tourism animation activities [Электронный ресурс] // Экономика и социум, 2020, №11(78). С. 335-338.
44. Rasulov, R. X. R. (2022). Ikkita buzilish chizig’iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
45. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
46. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
47. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
48. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
49. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).
50. Rasulov, H. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).
51. Rasulov, H. (2021). О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 1(1).
52. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.