SCIENCE AND INNOVATION
INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL VOLUME 1 ISSUE 6
UIF-2022: 8.2 | ISSN: 2181-3337

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПУАССОНА ДЛЯ КЛАССА ХАРДИ H_A^1.

Бехзод Хусенов Эркин угли
Базовый докторант(PhD) Бухарского Государственного Университета
https://doi.org/10.5281/zenodo.7179653

Аннотация. *Мы рассматриваем* $A(z)-$*аналитических функций в случае, когда* $A(z)$ *является антианалитический функцией. Представление Пуассона для* $A(z)-$*аналитических функций приведена как теорема и доказано.*

Ключевые слова: *Уравнения Бельтрами,* $A(z)-$*аналитическая функция,* $A(z)-$*гармоническая функция, Задача Дирихле для* $A(z)-$*гармонических функций, аналог формулы Пуассона для* $A(z)-$*гармонических функций, представление Пуассона для класса Харди* H_A^1.

THE POISSON REPRESENTATION FOR THE CLASS OF H_A^1 FUNCTIONS.

Abstract. *We consider* $A(z)-$*analytic functions in the case when* $A(z)$ *is an antianalytic function. The Poisson representation for* $A(z)-$*analytic functions is given as a theorem and proved.*

Keywords: *Beltrami equations,* $A(z)-$*analytic function,* $A(z)-$*harmonic function, Dirichlet problem for* $A(z)-$*harmonic functions, analog of Poisson formula for* $A(z)-$*harmonic functions, Poisson representation for Hardy class* H_A^1.

ВВЕДЕНИЕ

Многие теоретические и прикладные исследования, проводимые на мировом уровне в комплексном анализе, в теории аналитических функций, в комплексной теории динамических систем, а также в томографиях сводится к свойствам квазиконформных отображений и $A(z)-$аналитических функций. Квазиконформные отображения и $A(z)-$аналитические функции составляют важный раздел комплексного анализа.

В настоящее время изучение функциональных свойств $A(z)-$аналитических функций остается одной из важных задач теории функций комплексных переменных. Одним из важнейших вопросов в современном мире является изучение класса $A(z)-$гармонических функций и их свойств на основе $A(z)-$аналитических функций, совершенствование метода изучения геометрических свойств $A(z)-$гармонической функции в связи с этим, особое внимание уделяется целевым исследованиям, в том числе изучению класса $A(z)-$субгармонических функций, развитию теории потенциалов в классе $A(z)-$субгармонических функций, а также методам изучения $A(z)-$гармонических измерений.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Класс $A(z)-$**аналитических функций.** Решения уравнения Бельтрами:

$$\overline{D}_A f(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar z} - A(z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

напрямую связано с квазиконформными отображениями. В общем случае, относительно функции $A(z)$, преполагается, что она измерима и $|A(z)| \le C < 1$ почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. В литературе решения уравнения (1) обычно называют $A(z)-$*аналитическими* функциями.

Теорема 1. (см. [7]). *Для любой измеримой функции на комплексной плоскости функции существует* $A(z): \|A\|_{\mathbb{C}} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \{|A(z)|\} < 1$ *существует единственное гомеоморфное решение* $\psi(z)$ *уравнения (1) такое, что оставляет неподвижными точки* $0, 1, \infty.$

Отметим, что если функция $A(z):\ (|A(z)| \le c < 1)$ определена только в области $D \subset \mathbb{C}$, то её можно продолжать на всю плоскость $\mathbb{C}$, полагая $A(z) \equiv 0$ вне D, так что теорема 1 верна для любой области $D \subset \mathbb{C}$.

Теорема 2. ([1]). *Множество всех обобщенных решений уравнения (1) исчерпывается формулой*

$$f(z) = \Phi[\psi(z)], \tag{2}$$

где $\psi(z)$ *- гомеоморфное решение из теоремы 1, а* $\Phi(\zeta)$ *- голоморфная функция от* ζ *в* $\psi(D)$. *Более того, голоморфная функция* $\Phi = f \circ \psi^{-1}$ *наследует особенности* $f(z)$ *с сохранением типов.*

Из теоремы 2 вытекает, что $A(z)-$аналитическая функция $f(z)$ осуществляет внутреннее отображение, т. е. она переводит открытое множество в открытое. Отсюда вытекает справедливость принципа максимума: для любой ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$ максимум модуля достигается только на границе,

$$|f(z)| < \max_{z\in\partial D} |f(z)|, \quad z \in D.$$

Если функция не обращается в нуль, то верен и принцип минимума:

$$|f(z)| > \min_{z\in\partial D} |f(z)|, \quad z \in D.$$

Теорема 3. ([3]). *Если функция* $A(z)$ *принадлежит классу* m *раз непрерывно дифференцируемых функций:* $A(z) \in C^m(D)$, *то всякое решение* $f(z)$ *уравнения (1) тоже принадлежит, как минимум, этому же классу, т. е.* $f(z) \in C^{m+1}(D)$.

Основные понятие $A(z)-$гармонических функций. Теорема 4. [9]. *Действительная часть* $A(z)-$*аналитической функции* $f \in O_A(D)$ *удовлетворяет в области* D *уравнению*

$$\Delta_A u = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left(\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar z} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left(\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar A\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right)\right) = 0. \tag{3}$$

И наоборот, если D *– односвязная область, а* $u \in C^2(D), u: D \to R$, *дважды дифференцируемая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению* (3), то *существует* $f \in O_A(D)$, $u = \operatorname{Re} f$.

В связи с теоремой 3. естественно ввести понятие $A(z)-$*гармонической* функции следующим образом:

Определение 1. [9]. *Дважды дифференцируемая функция* $u\in C^2(D)$, $u:D\to R$, *называется* $A(z)-$*гармонической в области* D, *если всюду в* D *функция и удовлетворяет дифференциальному уравнению (3).*

Класс $A(z)-$гармонических в области D функций обозначаем как $h_A(D)$.

Таким образом, оператор $\Delta_A u$ в теории $A(z)-$гармонических функций играет такую же роль, что и оператор Δu в теории гармонических функций. Из теоремы 3. вытекает, что действительная часть и мнимая часть $A(z)-$аналитической в области D функции $f=u+iv$ являются $A(z)-$гармоническими функциями. Функция v называется *сопряженно гармонической* к u функцией.

Задача Дирихле для $A(z)-$гармонических функций. Для $A(z)-$гармонических функций естественно рассматривается следующая задача Дирихле:

Задача Дирихле. [9] *Задана ограниченная область* $G\subset D$ *и на границе* ∂G *задана непрерывная функция* $\omega(\zeta)$. *Требуется найти* $A(z)-$*гармоническую в области* G, *непрерывную на замыкании* G *функцию* $u(z)\in h_A(G)\cap C(\overline{G}):u|_{\partial G}=\omega$.

Известная классическая формула Пуассона является простейшим, а также наиболее важным примером решения задачи Дирихле в классе гармонических функций. В случае, когда область $G\subset D$ является лемнискатой, $G=L(a;R)$, имеет место следующий аналог

Теорема 4. [9] (аналог формулы Пуассона для $A(z)-$гармонических функций). *Если функция* $\omega(\zeta)$ *непрерывна на границе лемнискаты* $L(a;R)$, *то функция*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi R}\oint_{|\psi(a;\zeta)|=R}\omega(\zeta)\frac{R^2-|\psi(a;z)|^2}{|\psi(\zeta;z)|^2}\left|d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}\right| \qquad (4)$$

является решением задачи Дирихле в $L(a;R)$.

Функция $f(\zeta;z)=\dfrac{\psi(a;\zeta)+\psi(a;z)}{\psi(\zeta;z)}$ является $A(z)-$аналитической функцией по $z\in L(a;R)$, где $\zeta\in\partial L(a;R)$. Тогда $P(\zeta;z)=\dfrac{1}{2\pi}\operatorname{Re}f(\zeta;z)\in h_A(L(a;R))$ и, кроме того

$$P(\zeta;z)=\frac{1}{2\pi}\left(f(\zeta;z)+\overline{f}(\zeta;z)\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\psi(a;\zeta)+\psi(a;z)}{\psi(a;\zeta)-\psi(a;z)}+\frac{\overline{\psi}(a;\zeta)+\overline{\psi}(a;z)}{\overline{\psi}(a;\zeta)-\overline{\psi}(a;z)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{|\psi(a;\zeta)|^2-|\psi(a;z)|^2}{|\psi(\zeta;z)|^2}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{R^2-|\psi(a;z)|^2}{|\psi(\zeta;z)|^2}\right). \qquad (5)$$

Формула (5) называется аналогом *формулы Пуассона* для $A(z)-$гармонических функций.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Класс Харди для $A(z)-$аналитических функций в случае $p=1$. Класс Харди для $A(z)-$аналитических функций приведен в [10]. Мы введем класс Харди H_A^p для $A(z)-$аналитических функций в случае $p=1$.

Определение 2. *Говорят, что $A(z)-$аналитическая функция $f(z)$ принадлежит класс Харди H_A^1, если её средние*

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|\psi(z;a)|=r} |f(z)|\left|dz+A(z)d\bar{z}\right| \qquad (6)$$

ограничен в лемнискате $L(a;r)$.

Классы H^p были введены Ф. Риссом. Они впервые доказали теорему сходимости этого класса функций в 1923 году. После этого, мы введем класс Харди также для $A(z)-$гармонических функций в случае $p=1$.

Предложение 1. $u(z)\in h_A(L(a;r))$ *называется находящимся в* H_A^1, *если средний интеграл*

$$\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|\psi(z;a)|=r} |u(z)|\left|dz+A(z)d\bar{z}\right| \qquad (7)$$

ограничен в лемнискате $L(a;r)$.

Класс функций H_A^∞ обозначает множество всех функций $A(z)-$аналитических и ограниченных в лемнискате $L(a;r)$. Также стоит отметить, что если $f(z)$ принадлежит классу H_A^∞, то он также принадлежит классу H_A^1, то есть $H_A^\infty\subset H_A^1$.

Пространство Харди для $A(z)-$аналитических функций при $p=1$представляет собой класс функций, который является конечной нормой в лемнискате $L(a;r)$.

$$\|f\|_{H_A^1}=\sup_{0<\rho<r}\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho}|f(z)|\left|dz+A(z)d\bar{z}\right|<\infty.$$

Обозначим через H_A^∞ пространство, $A(z)-$аналитические функции и ограниченное в лемнискате $L(a;r)$. Для $f\in H_A^\infty$ условие нормы выражается следующим образом:

$$\|f\|_{H_A^\infty}=\sup_{|\psi(z;a)|<r}|f(z)|\left|dz+A(z)d\bar{z}\right|<\infty.$$

Представление Пуассона для класса функций H_A^1. Теперь мы приводим пуассоновское представление для класса функций H_A^1.

Теорема 5. *Пусть* $u(z)\in H_A^1(L(a;r))$. *Если* $u(z)$ *является* $A(z)-$*гармонической функцией в лемнискате* $L(a;r)$, *то*

$$u(z)=\int\limits_{|\psi(z;a)|=r} P(\zeta;z)u(\zeta)\,|\,d\zeta+A(\zeta)d\bar{\zeta}\,|, \qquad (8)$$

где $z\in L(a;r)$.

Доказательства. Пространство H_A^1, к сожалению, не сопряжено ни с каким другим. Поэтому при доказательстве теоремы мы рассматриваем последовательность

$u_n(z)=u\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)z\right)$ и с помощью диагонального процесса Кантора можем выделить из них подпоследовательность $u_n(z)\in H_A^1(L(a;r))$.

Теперь, для каждого $n\in N$, функция используется сейчас $u_n(z)\in h_A(L(a;\rho))$, поэтому, если $\rho=\left(1-\frac{1}{n}\right)r$, то

$$u_{n_j}(z)=\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho}\frac{\rho^2-|\psi(z;a)|^2}{|\psi(z;\xi)|^2}u_{n_j}(\xi)\,|\,d\xi+A(\xi)d\overline{\xi}\,|=\int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho}P_1(\zeta;z)u_{n_j}(\xi)\,|\,d\xi+A(\xi)d\overline{\xi}\,|,$$

где $\xi\in\partial L(a;\rho)$.

$$\lim_{j\to\infty}u_{n_j}(z)=\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho}P_1(\xi;z)u_{n_j}(\xi)\,|\,d\xi+A(\xi)d\overline{\xi}\,|=\int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho}P_1(\zeta;z)u_n(\xi)\,|\,d\xi+A(\xi)d\overline{\xi}\,|.$$

В этом равенстве слева находится

$$\lim_{j\to\infty}2\pi\rho u_{n_j}(\xi)=2\pi\rho u(z).$$

Таким образом, равенство (8) является подходящим:

$$u(z)=\int\limits_{|\psi(z;a)|=r}P(\zeta;z)u(\zeta)\,|\,d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}\,|,$$

где $u(\zeta)\in H_A^1(L(a;r))$. Теорема доказана.

Тот же результат справедлив при том же доказательстве и $p=\infty$, если мы немного изменим формулировку теоремы:

Следствие 1. *Если* $u(z)$ *является ограниченной* $A(z)-$*гармонической функцией в* $L(a;r)$, *то*

$$u(z)=\int\limits_{|\psi(z;a)|=r}P(\zeta;z)u(\zeta)\,|\,d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}\,|,$$

где $z\in L(a;r)$.

Доказательство этого следствия непосредственно вытекает из вышесказанного и теоремы 5.

ОБСУЖДЕНИЕ

В этом работе мы введем класс Харди H_A^p для $A(z)-$аналитических функций в случае $p=1$. Затем мы включили Интеграл Пуассона для этого класса как решение задачи Дирихле. Работа, проделанная здесь, упростила предыдущее условие, приведя это (8).

ВЫВОДЫ

Из доказанной нами теоремы вытекает для выше следствие. Требуется вводятся представление Пуассона для класс Харди H_A^1.

Следствие. *Если* $u(z)$ *является ограниченной* $A(z)-$*гармонической функцией в* $L(a;r)$, *то*

$$u(z)=\int\limits_{|\psi(z;a)|=r}P(\zeta;z)u(\zeta)\,|\,d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}\,|,$$

где $z\in L(a;r)$.

REFERENCES

1. Б. Боярский, Гомеоморфная решения уравнения Бельтрами // Докл. АН
2. СССР, 1955, том 102, № 4, стр. 661-664.
3. А. Л. Бухгейм, С. Г. Казанцев, *Эллиптическая система типа Белтрами и задача томография,* Докл. АН СССР, 1990, 315, № 1, 15-19.
4. И. Н. Векуа, *Обобщенние аналитические функции,* Наука, Москва, 1988.
5. Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Белтрами,* 2013, 25, № 4, 101-124.
6. А. Н. Кондрашов, *Уравнения Белтрами, вырождающиеся на дуге, 2014, 24, № 5, 24-39.*
7. Э. Х. Якубов, *О решениях уравнения Белтрами с вырождением,* Докл. АН СССР, 1978, 243, № 5, 1148-1149.
8. L. Alfors, *Lectures on quasiconformal mappings, Springer, Toronto-New York-London, 1966.*

A. Sadullayev, N. M. Jabborov, *On a class of A-analytic functions.* J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., Volume 9. Issue 3. 2016, 374-383 p.

9. Н. М. Жабборов, Т. У. Отабоев, Ш. Я. Хурсанов, *Неравенство Шварца и формула Шварца для* $A(z)-$ *аналитических функций,* СМФН, 2018, том 64, № 4, 637 - 649.
10. B. E. Husenov, Generalization of the Hardy class for $A(z)-$analytic functions, J. Scientific Reports of Bukhara State Univ. 86 (2021), no. 4, 29-46.