ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ПЕРВОГО ПОРЯДКА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ В ТРЁХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Зиёдулла Маликов
Доцент Самаркандского Государственного Университета
Ситорабону Отажонова Шухратовна
Магистр Бухарского Государственного Университета
https://doi.org/10.5281/zenodo.7178378

Аннотация. *В данной работе рассматривается решение задачи Коши для систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в специальной ограниченной области.*

Ключевые слова: *задача Коши, неустойчивая задача, система эллиптического типа первого порядка, специальной ограниченной области в трёхмерной области, диагональная матрица, эрмитовая матрица, функция Миттаг-Леффлера.*

THE CAUCHY PROBLEM FOR FIRST-ORDER ELLIPTIC TYPE SYSTEMS IN A SPECIAL BOUNDED DOMAIN IN A THREE-DIMENSIONAL DOMAIN

Abstract. *In this paper, we consider the solution of the Cauchy problem for first-order elliptic type systems with constant coefficients in a special bounded domain.*

Keywords: *cauchy problem, unstable problem, first-order elliptic type system, special bounded domain in a three-dimensional domain, diagonal matrix, Hermitian matrix, the Mittag-Leffler function.*

ВВЕДЕНИЕ

Задача Коши для системы эллиптического типа является некорректно поставленной задачей, т. е. задача является неустойчивом. Если сузить класс существование решение до компакта, тогда задача превращается к условно-корректным задачам. Тогда нужно построить решение зависшие от параметра, которых при стремлении параметра на бесконечности, оно стремится к точным решением.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Вводим следующие обозначение:

$$x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3), r=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2},$$

$$x^1=(x_1,x_2), y^1=(y_1,y_2), \alpha=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}, \alpha_1=|y^1|=\sqrt{y_1^{\,2}+y_2^{\,2}},$$

$$\alpha_0=|x^1|=\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}},_3, \beta=\tau y_3-\alpha_0, \gamma=\tau x_0-\alpha_0, \tau=tg\frac{\pi}{2\rho}, \rho>1,$$

$$\omega=i\sqrt{u^2+\alpha^2}\tau+\beta, u>0, \omega_0=i\sqrt{u^2+\alpha^2}\tau+\beta,$$

$$u(x)=\left(u_1(x),u_2(x),\ldots,u_n(x)\right)^T, \; n\geq 3, \frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T.$$

$E(x)-$диагональная матрица размерности $n\times n$, $u^0=(1,1,\ldots,1)$, $n-$мерной вектор.

Через $A_{l\times n}\left(x^T\right), l\geq 3, n\geq 3$ обозначим класс матриц $D\left(x^T\right)\in A_{l\times n}\left(x^T\right)$ элементы которых состоящих из линейной функции с комплексной коэффициентами удовлетворяющий условии $D^*\left(x^T\right)D\left(x^T\right)=E\left(\left(\left|x\right|^2+\lambda\right)u^0\right)$, где $D^*\left(x^T\right)$ эрмитовим сопряжённым к границе к матрице $D\left(x^T\right)$.

Пусть $G\subset R^3$ односвязной ограниченной области с гладкой границей. В области G рассматриваем систем дифференциальных уравнений вида

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(x\right)=0, x\in G, \qquad (1)$$

где $D\left(x\right)\in A_{l\times n}\left(x^T\right)$.

Интегральная формула является основным аппаратом решение многих математических задачах. В работе [2] доказывается интегральная формула для систем эллиптического типа первого порядка в ограниченной области.

Если $u\left(x\right)=C^1\left(G\right)\bigcap C\left(\overline{G}\right)$ удовлетворяет систему (1) в области G, тогда верна следующая интегральная формула

$$u\left(x\right)=\int\limits_{\partial G}M\left(x,y\right)u\left(y\right)ds_y, x\in G, \qquad (2)$$

где

$$M\left(x,y\right)=\left(E\left(\frac{C_3 cos\lambda r}{r}\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D\left(t^T\right), C_3=\frac{1}{4\pi}. \qquad (3)$$

Пусть функция $K\left(w\right), w=u+iv$ целая функция, вещественно при вещественном аргумента, удовлетворяющий условии

$$\sup_{v\geq 1}\left|v^pK^p\left(w\right)\right|=M\left(p,u\right)<\infty, p=0,1,2,3, K\left(u\right)\neq 0,$$

тогда функцию $\Phi_\sigma\left(y,x\right)$ определим следующим образом

$$\Phi_\sigma\left(y,x\right)=\frac{1}{4\pi K\left(x_3\right)}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\frac{K\left(w\right)}{w-x_3}\frac{cos\lambda udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}. \qquad (5)$$

В работе [3] показана, что функция $\Phi_\sigma\left(y,x\right)$ представима ввиду

$$\Phi_\sigma\left(y,x\right)=\frac{\cos\lambda r}{4\pi r}+g_\sigma\left(y,x\right). \qquad (6)$$

Пусть $G_\rho\subset R^3$ ограниченная область с кусочно гладкой границей, состоящий из части поверхности конуса $\alpha_1=\tau y_3, y_3\geq 0$, гладкой поверхности S. Будем считать, что G_ρ лежит внутри конуса и содержит точку x_0. В областью G_ρ рассматриваем систему уравнений (1).

Рассматриваем задачи Коши в подстановки М.М.Лаврентьева [1]. Пусть вектор функция $u(y)$ из класса $u(x)=C^1(G_\rho)\cap C(\overline{G_\rho})$, удовлетворяет систему (1) в области G_ρ и задана значение вектор функция $u(y)$ на S, т. е. $u(y)|_S=f(y), y\in S$.

Требуется восстановление вектор функции в области G_ρ.

Если $u(x)=C^1(G_\rho)\cap C(\overline{G_\rho})$ удовлетворяет систему (1) в области G_ρ, тогда верна следующая интегральная формула:

$$u(x)=\int_{\partial G_\rho} M_\sigma(x,y)u(y)ds_y, x\in G, \qquad (7)$$

где $M_\sigma(x,y)=\left(E(\Phi_\sigma(x,y))D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D(t^T)$.

В этой области функцию $K(w)$ выбираем следующим образом $K(w)=E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}}w\right), \sigma>0,$ тогда функцию $\Phi_\sigma(y,x)$ принимает вида.

$$\Phi_\sigma(y,x)=\frac{1}{4\pi E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}}\gamma\right)}\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}}w\right)}{w-x_3}\frac{cos\lambda udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \qquad (8)$$

$E_\rho\left(\sigma^{\frac{1}{\rho}}w\right)-$ функцию Миттаг-Леффлера.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Основным результатом работы является следующая теорема. Обозначим $u_\sigma(x)=\int_S M_\sigma(x,y)u(y)ds_y, x\in G,$ тогда верна теорема:

Теорема. Если вектор функция $u(y)$ из класса $u(x)=C^1(G_\rho)\cap C(\overline{G_\rho})$, удовлетворяет систему (1) в области G_ρ на части границы области $y\in G_\rho\setminus S$,

выполняется неравенства $|u(y)|\le 1$, тогда верна следующая неравенства

$$|u(x)-u_\sigma(x)|\le C_1(x)\sigma\exp(-\sigma\gamma^\rho), x\in G_\rho$$

$$\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial u_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|\le C_2(x)\sigma^2\exp(-\sigma\gamma^\rho), x\in G_\rho, i=1,2,3.$$

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает из оценки следующих интегралов

$$\int\limits_{\partial G_\rho \backslash S} \Phi_\sigma(x,y)ds_y, \int\limits_{\partial G_\rho \backslash S} \frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_i} ds_y, i=1,2,3.$$

Приведём оценки устойчивости. Пусть вектор функции $u(x)=C^1(G_\rho)\cap C(\overline{G_\rho})$ удовлетворяет систему (1) в области G_ρ, на части границы области $y\in G_\rho \setminus S$, выполняется неравенства $|u(y)|\le 1$, а на S условии $|u(y)|\le\delta, \left|\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\right|\le\delta, 0<\delta<1, i=1,2,3,$ тогда верна неравенства:

$$|u(x)|\le C_1(x)\delta^{\left(\frac{\gamma}{R}\right)^\rho}\ln\frac{1}{\delta},$$

$$\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|\le C_2(x)\delta^{\left(\frac{\gamma}{R}\right)^\rho}\ln^2\frac{1}{\delta}, x\in G_\rho, R^\rho=\max_{y\in S}\operatorname{Re} w_0.$$

ОБСУЖДЕНИЕ

В этой статье в основном обсуждается нахождение функции в трёхмерном пространстве R^3 как решение рассматриваемой задачи Коши на ограниченной области с кусочно гладким границы.

ВЫВОДЫ

Из доказанной нами теоремы вытекает для выше следствие. Требуется восстановление вектор функции в области G_ρ.

Если $u(x)=C^1(G_\rho)\cap C(\overline{G_\rho})$ удовлетворяет систему (1) в области G_ρ, тогда верна следующая интегральная формула:

$$u(x)=\int\limits_{\partial G_\rho} M_\sigma(x,y)u(y)ds_y, x\in G, \tag{7}$$

где $M_\sigma(x,y)=\left(E(\Phi_\sigma(x,y))D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D(t^T).$

REFERENCES

1. М.М.Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математического физики. / Изд.СО. АН.СССР. Новосбриск. 1962 г.
2. Н.Н.Тарханов. Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Ин-т физики АН,СССР, Красноярск ,1980.С 147-160
3. Ш.Ярмухамедов. О продолжении решения уравнения Гельмгольца/ ДАН. 1997. Т.357. №3. С.320-323.