

XUSUSIY HOSILALI GIPERBOLIK TIPGA TEGISHLI TENGLAMALAR HAQIDA AYRIM MULOHAZALAR

Jamolov Bexruz Jalilovich

Buxoro davlat universiteti Fizika-matematika fakulteti magistri

Mohinur Xaydar qizi Raupova

Toshkent viloyati Chirchiq davlat pedagogika instituti o'qituvchisi

<https://doi.org/10.5281/zenodo.7149211>

Annotatsiya. Maqolada xususiy hosilali giperbolik tipga tegishli tenglamalarning paydo bo'lish tarixi va amaliy tadbiqlari hamda shu yo'nalishda izlanishlar olib borgan olimlar haqida ma'lumotlar keltirilgan. Tebranish tenglamasi, xususan ipning elastik ko'ndalang tebranishlarining tenglamasi va yechimlari bayon qilingan. Xususiy hosilali tenglamalar tasnifi keltirilgan va giperbolikka tipga tegishli xususiy hosilali tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy va boshlang'ich masalalar tahlil qilingan. Tipik misollar oson usullar bilan yechib ko'rsatilgan. Aralash tipdagi tenglamalar, xususan buzilish chizig'iga ega giperbolik tenglama haqida fikrlar bayon qilingan va uning yechimi Riman funksiyasi orqali yozilishi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: matematik fizika, osmon mexanikasi, elektromagnit tebranishla, funksiya, elastik ip, kuchlanish, segment, Guk qonuni, tortishish kuchi, perpendikulyar harakat, differentsial tenglama, chiziqli algebra, elliptik tip, statsionar jarayonlar, chegaraviy shartlar, giperbolik tip, parabolik tip, Koshi masalasi.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ УРАВНЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Аннотация. В статье приведены история возникновения и практического применения уравнений гиперболического типа с частными производными, а также сведения об ученых, проводивших исследования в этом направлении. Изложены уравнения колебаний, в частности уравнение и решения упругих поперечных колебаний струны. Дана классификация дифференциальных уравнений частных производных, проанализированы краевые и начальные задачи для гиперболического типа. Указаны методы решения типичных примеров простыми способами. Изложены замечания об уравнениях смешанного типа, в частности, гиперболическом уравнении с линией вырождения, и указаны ее решение с помощью функцией Римана.

Ключевые слова: математическая физика, небесная механика, электромагнитные колебания, функция, струна, натяжение, отрезок, закон Гука, гравитация, перпендикулярное движение, дифференциальное уравнение, линейная алгебра, эллиптический тип, гиперболический тип, параболический тип, стационарные процессы, граничные условия, задача Коши.

SOME REMARKS ON EQUATIONS OF THE HYPERBOLIC TYPE WITH PARTICULAR DERIVATIVES

Abstract. The article presents the history of the emergence and practical applications of equations of the hyperbolic type with specific derivatives, as well as information about scientists who conducted research in this direction. The vibration equation, in particular, the equation and solutions of the elastic transverse vibrations of the string are described. The classification of differential equations is given, and the boundary and initial problems for differential equations of the hyperbolic type are analyzed. A number of typical examples are shown in easy ways. The ideas about mixed-type equations, in particular, the hyperbolic equation with a fault line, are

presented, and its solution is shown to be written by the Riemannian function.

Keywords: *mathematical physics, celestial mechanics, electromagnetic oscillation, function, elastic thread, tension, segment, Hooke's law, gravity, perpendicular motion, differential equation, linear algebra, elliptic type, stationary processes, boundary conditions, hyperbolic type, parabolic type, Cauchy problem.*

KIRISH

Xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi ikkita xarakterli xususiyatga ega. Birinchidan, u zamonaviy matematik fizikaning asosiy tadqiqot vositasidir. Ma'lumki, oddiy differensial tenglamalar nazariyasi XVIII asrda differensial va integral hisoblar paydo bo'lgandan so'ng darhol rivojlana boshladi. Oddiy differensial tenglamalar orqali yangi hisob-kitoblar geometriya va mexanika masalalariga o'tdi. Osmon mexanikasi nafaqat ilgari ma'lum bo'lgan faktlarni tushuntirishga, balki yaratishga ham muvaffaq bo'ldi (masalan, Neptun sayyorasi xususiy hosilali differensial tenglamalar tahlili yordamida kashf etilgan).

Fizikada paydo bo'lgan o'ziga xos tenglamalar shakli ancha keyinroq o'rganila boshlandi. Bu esa XVIII asr o'rtalarida tahlilning yangi tarmog'i - matematik fizikaning tenglamalari paydo bo'lishiga olib keldi. Bu fan Dalamber, Eyler, Bernulli, Furiye asarlarida o'z ifodasini topgan. Bu olimlar matematikaning o'ziga xos muammolarini tadqiq qildilar. Fizika va ular tomonidan ishlab chiqilgan g'oyalar va usullar keng sinflarga taalluqli bo'lib chiqdi XIX asrning oxirida xususiy hosilali differensial tenglamalarning umumiy nazariyasini ishlab chiqish uchun asos bo'lib xizmat qilgan. Xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining yana bir xususiyati uning matematikaning boshqa sohalari bilan chambarchas bog'liqligidir: funktsional analiz va funksiyalar nazariyasi, topologiya, algebra, kompleks analiz va boshqalar.

TADQIQOT MATERIALLARI VA METODOLOGIYASI

Tebranish tenglamasi Dalamber tomonidan 1747 yilda kiritilgan. Tor tebranishlar tenglamasi uchun Koshi masalasini yechish Dalamber formulasi deb ataladi. Bernulli bu tenglamaning har bir yechimini ta'kidladi va trigonometrik qator bilan ifodalanadi. Eylerning Dalamber va Bernulli bilan torli tebranish tenglamasining yechimlari tabiati bo'yicha tortishuvi matematik fizika va trigonometrik qatorlar nazariyasi rivojiga juda katta hissa qo'shdi.

Funksiyalarni trigonometrik qatorlarga kengaytirish muammosini keying tadqiq etish Furiye tomonidan 1822 yilda amalga oshirilgan, u issiqlik tarqalishi muammolari bilan bog'liq. Keyinchalik esa Dirixlening ishlari birinchi bo'lib parchalanish uchun yetarli shartlarni ishlab chiqib, funksiyalarni trigonometrik qatorlarga aylantirdi. Demak, funksiyani trigonometrik qator bilan ifodalash masalasini ko'radigan bo'lsak, birinchi marta matematik fizika masalalarida paydo bo'ldi va zamonaviy to'plamlar nazariyasi va funksiyalar nazariyasini yaratishda katta hissa qo'shdi. Maxsus o'rganish paytida fizik masalalardan tenglamalar, umumiy usullar ko'pincha yaratilgan bo'lib, ular dastlab keng ko'lamli masalalarga qat'iy matematik asoslanmagan holda qo'llanilgan.

Fizik hodisani o'rganish bilan bog'liq matematik muammoni shakllantirishda, birinchi navbatda uni tavsiflovchi miqdorlar ajratib ko'rsatiladi. Bunday qadriyatlar bilan zinchlik, tezlik, harorat va boshqalar bo'lishi mumkin. Keyin fizik qonunlar tanlanadi va matematik shakllantiriladi, bu hodisa nazariyasining asosi bo'lishi mumkin. Ushbu qonunlar sodda va izchil bo'lishi kerak. Qoidaga ko'ra, bu qonunlar hodisaning asosiy belgilari va fazoning ma'lum bir nuqtasida ularning xususiy hosilalari o'rtasidagi nisbatlar sifatida yozilishi mumkin.

TADQIQOT NATIJALARI

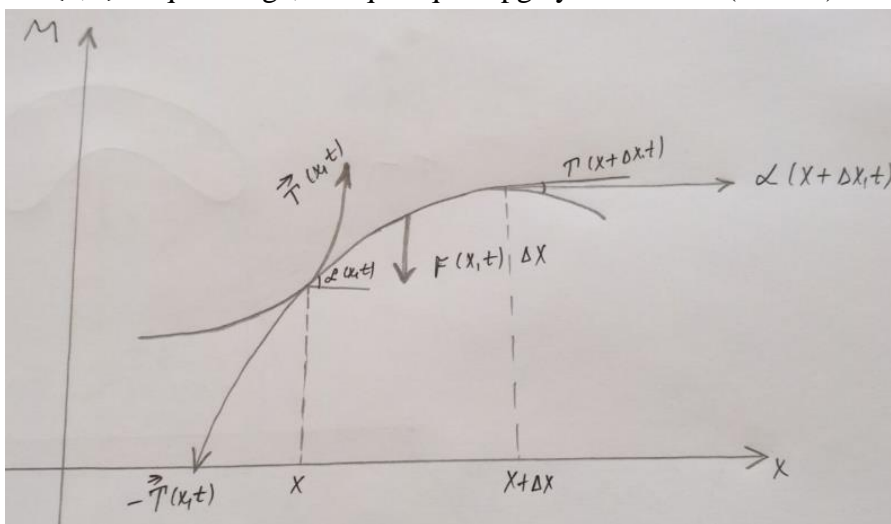
Bunday yozuvning mumkinligi mohiyatiga ko'ra ko'pincha tenglamalarni chiqarishda barcha ma'lum turdagi o'zaro ta'sirlarning joylashishi va avval ba'zi integral saqlanish qonunlaridan (masalan, massa, impuls, energiya va boshqalar) foydalanish qulay va shundan keyingina o'rganilayotgan miqdorlarning yetarli darajada silliqqligini nazarda tutgan holda mahalliy tenglamalarga o'tiladi. Mexanikadagi (torlar, novdalar, membranalar va uch o'lchamli hajmlarning tebranishlari bo'yicha), shuningdek fizikadagi (elektromagnit tebranishlar bo'yicha) ko'plab muammolar quyidagi shakldagi tenglamaga olib keladi:

$$p * \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{div}(p \nabla u) - qu + F(x, t) \quad (1)$$

bu yerda $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

No'malum funksiya $u(x, t)$ n ($n = 1, 2, 3$) fazoviy o'zgaruvchilar $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va vaqt t ga bog'liq. ρ, p, q koeffitsientlari muhit xossalari bilan aniqlanadi. $F(x, t)$ funksiyasi tashqi bezovtalanishning zichligi.

Torning elastik ko'ndalang tebranishlarining (1) tenglamasini keltiraylik. egilishga qarshilik qilmaydigan elastik tor string deyiladi ($n = 1$). Tor o'zining muvozanat holati atrofida tekislikda (x, u) ko'ndalang tebranishlarni amalga oshiradi va bu x o'qi bilan mos keladi. $u(x, t)$ bilan ipning t vaqtdagi x nuqtadagi muvozanat holatidan chetlanishini belgilaymiz. Demak, $u = u(x, t)$ da bu t vaqtdagi ipning grafigi. Tor egilishga qarshilik ko'rsatmagani uchun uning taranglik kuchi $\vec{T}(x, t)$ nuqtada x ga, t vaqt nuqtasi ipga yo'naltiriladi (1-rasm).



1-rasm

$\vec{T}(x, t)$ kuchlanish kuchini topamiz. Guk qonuniga ko'ra, kuchlanish kuchi ipning nisbiy uzayishiga proporsionaldir. Segmentdagi tor uzunligi $[x, x + \Delta x]$, quyidagi formula bo'yicha

hisoblanadi: $l = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(y, t)\right)^2} dy = \Delta x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi, t)\right)^2}$.

$\xi \in [x, x + \Delta x]$ nuqta va uning $[x, x + \Delta x]$ segmentidagi torning nisbiy uzayishi:

$$\frac{l}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\xi, t)\right)^2} \rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2}, \Delta x \rightarrow 0.$$

Bundan kelib chiqadiki, tortish kuchi moduli $|T(x, t)| = T_0 \cdot \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)^2\right)^{1/2} = T_0 \cdot$

$\sqrt{1 + tg^2\alpha}$ bo'ladi. Endi u o'qiga taranglik kuchining proyeksiyasini topamiz:

$$T_u(x, t) = |T(x, t)| \cdot \sin\alpha = T_0 \cdot \sqrt{1 + tg^2\alpha} \cdot \sin\alpha = T_0 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = T_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, t). \quad (2)$$

$F(x, t)$ ta'sir etuvchi tashqi kuchning (ma'lum) zichligini bildirsin, tor t vaqtda x nuqtada va x o'qiga perpendikulyar yo'naltirilgan, tortishish kuchi $F(x, t) = -g \cdot \rho(x)$.

Bu yerda $\rho(x)$ chiziqlikni bildiradi. x nuqtadagi tor zichligi, ya'ni $\rho(x)\Delta x$ - tor segmentining massasi $[x, x + \Delta x]$. Bu kesmada taranglik kuchlari $\vec{T}(x + \Delta x, t) - \vec{T}(x, t)$ va tashqi kuch $\vec{F}(x, t)\Delta x$ segmentga ta'sir qiladi, ularning yig'indisi Nyuton qonuniga ko'ra segmentning massasi va uning tezlanishi teng bo'lishi kerak. x o'qidagi kuchlarning proyeksiyasi nolga teng (bu shuni anglatadiki x ning har bir nuqtasi x o'qiga perpendikulyar harakat qiladi).

Bizning vektorimizning proyeksiyasi u o'qiga teng (2): $T_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - F(x, t) \cdot \Delta x = p(x) \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$. Natijada, $p(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = T_0 \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] - F(x, t) \cdot \Delta x \rightarrow 0$ sifatida chegaraga o'tamiz va $u(x, t)$ funksiyani ikki marta uzluksiz deb faraz qilamiz, x ga nisbatan differensiallaymiz va t ga nisbatan biz tenglamani qaraymiz:

$$p(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F(x, t). \quad (3)$$

Bu torning elastik ko'ndalang tebranishlar tenglamasi deyiladi.

Agar tor doimiy zichlikka ega bo'lsa $\rho(x) = \rho$, u holda tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (4)$$

bu erda α ko'rsatilgan $\alpha^2 = T_0/\rho$, $f = F/\rho$. (4) Bir o'lchovli to'lqin tenglamasi deb ataladi.

(1) tenglama elastik tayoqning bo'ylama tebranishlarini ham tavsiflaydi ($n = 1$):

$$p(x) \cdot S(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x)S(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) \quad (5)$$

bu yerda $S(x)$ novda ko'ndalang kesimi maydoni, $E(x)$ x nuqtadagi Yang moduli.

Agar membrana zichligi ρ doimiy bo'lsa, tenglama soddalashtiriladi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f(x, t) \quad (6)$$

bunda $\alpha^2 = T_0/\rho$, $f = F/\rho$. (6) tenglama ikki o'lchovli to'lqin tenglamasi deb ataladi.

Ucho'lchovli to'lqin tenglamasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f(x, t) \quad (7)$$

elektr o'tkazmaydigan muhit tovushning o'rtada, elektromagnit to'lqinlarning bir xilda tarqalishini tavsiflaydi. To'lqin tenglamalari odatda quyidagi shaklda yoziladi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u + f(x, t), \quad (8)$$

bu erda Δ -Laplas operatori va $u: \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Haqiqiy hodisalarni differensial tenglamalar yordamida matematik ma'lum bir tavsiflash modellashtirish hisoblanadi. Masalan, Guk qonuni taxminiy, Furye issiqlik uzatish qonuni esa molekulyar strukturani hisobga olgan holda aniqlanishi mumkin. Shuning uchun, tadqiqotdan olingan xulosalar yoki hatto aniq olingan differensial tenglamalarning yechimlari ham

taxminiydir. Masalan, issiqlik tenglamasi issiqlik tarqalishining cheksiz tezligini (hatto nuqta manbasidan ham) bashorat qiladi, bu albatta, absurdidir. Shu bilan birga vaqt, bu ta'sir issiqlik tenglamasining matematik nazariyasi juda muvaffaqiyatli qo'llaniladigan muhandislikdagi issiqlik uzatish hisob-kitoblariga juda oz ta'sir qiladi. U xususiy hosilali differensial tenglamalarga tegishli asoslangan va boshqa ko'plab matematik modellarga. Biroq, matematik model asosida olingan xulosalar eksperimental natijalardan sezilarli darajada farq qiladi. Bu modelning nomukammalligini va uni o'rganilayotgan ob'ektning xususiyatlarini aniqroq aks ettiruvchi boshqa qonunlar bilan almashtirish zarurligini ko'rsatadi. Asosiy harakatni tavsiflovchi funksiyalarning silliqliqi haqida qo'shimcha taxminlar, parametrlar odatda differensial tenglamalarni olishda, matematikada tabiat qonunlarini yozishda, soddalashtirish uchun qabul qilinadi. Biroq, bu taxminlar har doim ham qulay yoki jismoniy oqlangan emas.

Xususiy hosilali differensial tenglamalar quyidagi shakldagi tenglamadir:

$$F \left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x); \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}(x), \dots \right) = 0, \text{ bu yerda } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset R^n, a u(x) - \text{noma'lum funksiya.}$$

Differensial tenglamaning tartibi uning hosilalarining maksimal tartibidir. Agar noma'lum funksiyaga va uning barcha xususiy hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lsa, xususiy hosilali differensial tenglamalar chiziqli deb ataladi. Agar u barcha yuqori hosilalarga nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda kvazichiziqli tenglama deyiladi. Misol uchun quyidagi tenglama:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + u^2 = 0$$

ikkinchi tartibli kvazichiziqli tenglamadir.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a(x_1, x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 2u$ ikkinchi tartibli chiziqli tenglama, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 = 2u$ esa chiziqli bo'lmagan va kvazichiziqli bo'lmagan tenglama hisoblanadi.

Quyidagi 2-tartibli chiziqli tenglama

$$p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \text{div}(p \nabla u) - q \cdot u + F(x, t) \tag{9}$$

tebranish jarayonlarini tenglamasini tavsiflaydi.

Diffuziya jarayonlarini ushbu

$$p \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(p \nabla u) - q \cdot u + F(x, t) \tag{10}$$

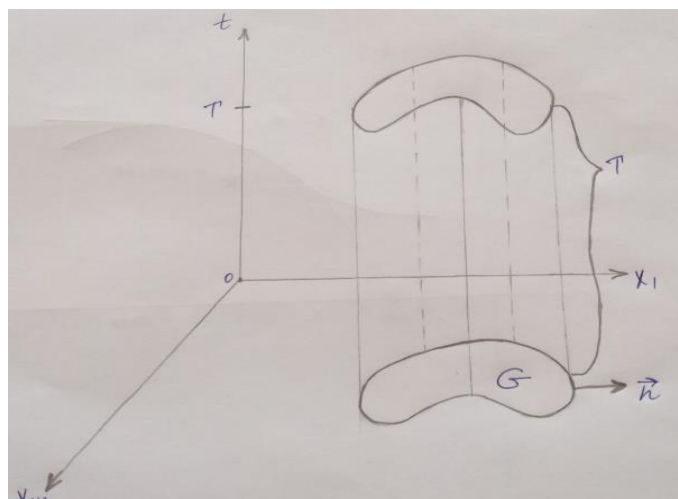
tenglamani tavsiflaydi.

Statsionar jarayonlarni ushbu

$$-\text{div}(p \nabla u) + q \cdot u = F(x) \tag{11}$$

tenglama tavsiflaydi.

$G \subset R^n$ jarayon sodir bo'ladigan maydon, S maydonning chegarasi G bo'lsin. Uni bo'lakli silliq sirt deb hisoblaymiz. Demak, $G - x$ (11) tenglamada argumentning aniqlanish sohasi, ya'ni bu tenglama berilgan soha. (9) va (10) tenglamalar berilgan soha $\Pi_T = G \times (0, T)$ - balandligi T , asosi G bo'lgan silindr bo'lsin. Uning chegarasi pastki yon yuzadan $S \times [0, T]$ va ikkita asosdan iborat: $\bar{G} \times \{0\}$ va yuqori $\bar{G} \times \{T\}$. Faraz qilamizki, (9)-(11) tenglamalarda ρ, p, q koeffitsientlar t vaqtga bog'liq emas (2-rasm).



2-rasm

Keyinchalik, bu miqdorlarning fizik ma'nosiga muvofiq, $\rho(x) > 0, p(x) > 0, q(x) \geq 0, x \in \bar{G}$ deb faraz qilamiz. Matematik ma'noga ega deb $\rho \in C(\bar{G}), p \in C^1(\bar{G}), q \in C(\bar{G})$ faraz qilishimiz kerak. Bizning tasnifimizga ko'ra, (9) tebranish tenglamasi giperbolik, (10) diffuziya tenglamasi parabolik, (11) tenglama esa elliptik tipda tegishli. Bu tenglamalarning turlarining farqi ular tasvirlaydigan fizik jarayonlar bilan chambarchas bog'liq. U yoki bu fizik jarayonni to'liq tavsiflash uchun tenglamaga qo'shimcha ravishda ushbu jarayonning dastlabki holatini va jarayon sodir bo'lgan hududning chegarasida rejimini ham ko'rsatish kerak. Matematik jihatdan bu differensial tenglamalar uchun yechimning o'ziga xos emasligi bilan bog'liq. Xususiyligini hosilali differensial tenglamalar uchun yechim odatda ixtiyoriy funksiyalarga bog'liq.

Masalan, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0$ tenglamaning umumiy yechimi (bu yerda $G = (0, 1) \times (0, 1)$) $u(x, y) = f(y)$ ko'rinishga ega, bu yerda $f(y)$ funksiya $C^1([0, 1])$ sinfga tegishli.

Shuning uchun, haqiqiy jismoniy jarayonni tavsiflovchi yechimni ajratib olish uchun, qo'shimcha shartlar belgilanishi kerak. Ushbu qo'shimcha shartlar va chegara shartlari: boshlang'ich shartlar va chegara shartlariga muvofiq vazifa chegaraviy masala deb ataladi.

Differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning uch turi mavjud.

a) Giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar uchun Koshi masalasi; b) Elliptik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masala; c) Giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalar uchun aralash masala: ham boshlang'ich, ham chegaraviy shartlar. Tebranish tenglamasi (12) (giperbolik tip) uchun Koshi masalasi quyidagicha beriladi: $\{t > 0\}$ yarim fazoda (12) tenglamani va $t = +0$ da quyidagi boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad x \in R^n, \quad (12)$$

$C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ sinfdagi $u(x, t)$ funksiyani toping, bunda $F \in C(t > 0), u_0 \in C^1(R^n), u_1 \in C(R^n)$.

Diffuziya tenglamasi (10) (parabolik tip) uchun Koshi masalasi quyidagicha qo'yilgan: $\{t > 0\}$ yarim fazoda (10) tenglamani va $t = +0$ da boshlang'ich shart qanoatlantiruvchi

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R^n \quad (13)$$

$C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ sinfidagi $u(x, t)$ funksiyani toping, bunda $F \in C(t > 0), u_0(x) \in C(R^n)$.

(x, t) tekislikdagi (x_0, t_0) o'zgarimas nuqta bo'lsin. U holda tor tenglamasi yechimining shu nuqtadagi qiymati (x o'qida $x_0 - at, x_0 + at$ nuqtalar belgilangan)

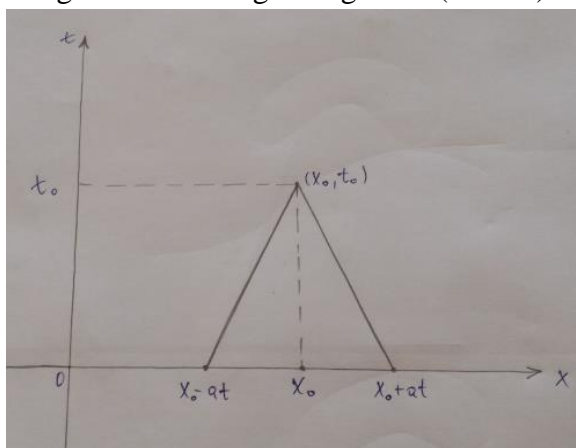
$$u(x_0, t_0) = \frac{u(x_0 + at, 0) + u(x_0 - at, 0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_0-at}^{x_0+at} \frac{\partial u}{\partial t}(y, 0) dy.$$

va ularni (x_0, t_0) nuqta bilan segmentlar bo'yicha bog'laymiz.

Bu chiziqlar torning erkin tebranish tenglamasining xarakteristikasidir. Dalamber formulasidan nuqtadagi eritmaning qiymati (x_0, t_0) faqat $[x_0 - at, x_0 + at]$ oraliqdagi boshlang'ich funksiyalarning qiymatlariga bog'liq bo'lib, $u(x_0, t_0)$ nuqtadan o'tuvchi xarakteristikalar orqali absissa o'qidan x uzilib qoladi. Bu yechimda tekislikning chegarasi dastlabki ma'lumotlarga bog'liq. Dalamber formulasiga boshqa tomondan yondashamiz. $\phi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalari faqat $[x_1 - \delta, x_1 + \delta]$ segmentda noldan farqli bo'lsin.

Savol: $\{(x, t), t \geq 0\}$ yarim tekislikning qayerida yechim noldan farq qiladi?

Dalamber formulasidan kelib chiqadiki, yechim $x - x_1 - \delta - at = 0$ xarakteristikasining o'ng tomonida va $x - x_1 + \delta + at = 0$ xarakteristikasining chap tomonida xuddi shunday nolga teng bo'ladi. Boshqacha aytganda, tebranish xarakteristikalar bo'yicha a tezlik bilan tarqaladi. Bu buzilishning tarqalish tezligi chekli ekanligini anglatadi (3-rasm).

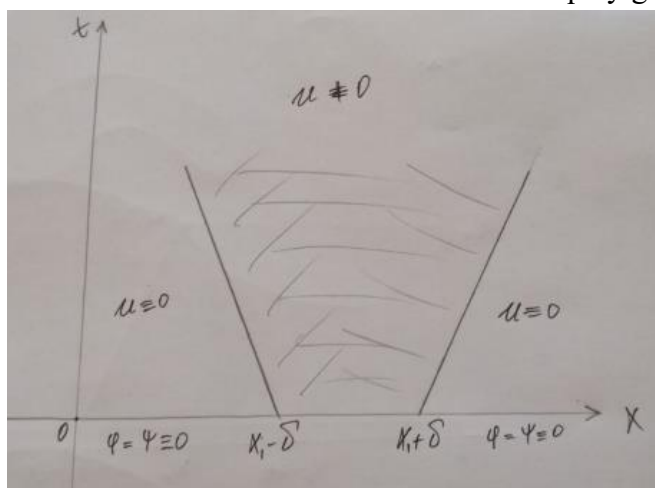


(3-rasm)

Tor tenglamasining umumiy yechimining yana bir muhim talqini bor:

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at),$$

bunda $f_1(x - at)$ funksiyasi x o'qi bo'ylab a tezlik bilan o'ngga o'tadigan to'lqinni bildiradi. $f_2(x + at)$ funksiyasi a tezlik bilan chapga bir xil harakatlanuvchi to'lqin. Demak, har qanday yechim turli yo'nalishlarda a tezlik bilan harakatlanuvchi ikki to'lqin yig'indisidir (4-rasm).



4-rasm

Tor tebranishlarining bir jinsli bo'lmagan tenglamasi uchun Koshi masalasini ko'rib chiqamiz. Bizga $f(x, t) \in C^1(R \times R_+)$ funksiya berilgan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in R, t \geq 0, \quad (14)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in R. \quad (15)$$

(1) va (2) masalalarni quyidagi ko'rinishda ifodalab tekshirish mumkin

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (16)$$

bu yerda $v(x, t)$ – berilgan $\phi, \psi, f \equiv 0$ bilan Koshi masalasini (14), (15) yechimi va $w(x, t)$ funksiyasi Koshi masalasini (14), (15) ma'lumotlar bilan yechish $\phi \equiv 0, \psi \equiv 0, f(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t), \\ w(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

$w(x, t)$ funksiya D'alamber formulasi yordamida tuziladi va uning yechimi:

$$w(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau.$$

Umumiy to'lqin tenglamasi uchun (18) formulani keyinroq chiqaramiz, ammo hozircha bu formula (17) muammoning yechimini aniqlab berishiga ishonch hosil qilamiz. Darhaqiqat, $w(x, 0) \equiv 0$ shartni qanoatlantirishi aniq. t va x ga nisbatan xususiy hosilalarni topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= 0 + \frac{1}{2a} \int_0^t [af(x+a(t-\tau), \tau) + af(x-a(t-\tau), \tau)] d\tau, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= f(x, t) + \frac{a}{2} \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+a(t-\tau), \tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-a(t-\tau), \tau) \right] d\tau, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{2a} \int_0^t [f(x+a(t-\tau), \tau) - f(x-a(t-\tau), \tau)] d\tau, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{1}{2a} \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+a(t-\tau), \tau) - \frac{\partial f}{\partial x}(x-a(t-\tau), \tau) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Bulardan kelib chiqib shuni xulosa qilamizki,

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x, t).$$

Formula (18) biroz sun'iy tuyulishi mumkin, ammo u Dyamel printsipli yordamida shaffof asosga ega. $f \in C^1$ bo'lishi sharti bilan bir jinsli bo'lmagan (14), (15) masalani yechish uchun mavjudlik teoremasi isbotlandi. Har doimgidek chiziqli masalalarda o'ziga xoslik $f \equiv 0$ bilan bir jinsli masalani isbotlash uchun yetarli.

Agar $u(x, y)$ – funksiya ikkita erkli o'zgaruvchili funksiya bo'lib, $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a, b, c, f - x, y$ o'zgaruvchili funksiyalar berilganlar bo'lsa, u holda bunday tenglamalar xususiy hosilali differensial tenglamalar deyiladi.

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + au_x + bu_y + cu = f(x, y), \quad (19)$$

ikkinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Agar $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a, b, c, f$ – funksiyalar faqat x va y o'zgaruvchilarga emas, balki u funksiyaga ham bog'liq bo'lsa, (1) tenglama kvazichiziqli deb ataladi.

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \quad (20)$$

yuqoridagi (20) ko'rinishdagi tenglama xarakteristik tenglama deyiladi.

$\varphi(x, y) = C$ tenglama bilan tasvirlangan egri chiziq, φ – bu yerda (20) tenglamaning yechimi, (19) tenglamaning xarakteristikasi deyiladi.

E'tibor berish kerakki,

$$\varphi(x, y) = C \rightarrow d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0 \rightarrow dy = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} dx$$

xarakteristik tenglamani (20) quyidagicha ifodalash ham mumkin:

$$a_{11}\varphi_{xx} + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_{yy} = 0. \quad (21)$$

Agar biron bir D sohada $a^2 - a_{11}a_{22} > 0$ bo'lsa, bu sohadagi (19) tenglama giperbolik tipdagi tenglamalarga tegishli deymiz. Bu holda xarakteristik tenglama ikkita tenglamaga ekvivalentdir:

$$a_{11}dy - (a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}) dx = 0, \quad (22)$$

$$a_{11}dy - (a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}) dx = 0. \quad (23)$$

$\varphi(x, y) = C_1$ va $\psi(x, y) = C_2$ bu tenglamalarning umumiy integrallari haqiqiydir va (1) tenglama xarakteristikasining ikki xil turkumini belgilaydi.

O'zgaruvchilarning shakl almashinishi

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (24)$$

giperbolik tipdagi tenglamani kanonik shaklga keltiradi:

$$u_{\xi\eta} + a_1u_\xi + b_1u_\eta + c_1u = d_1, \quad (25)$$

bu yerda $a_1, b_1, c_1d_1 - \xi$ va η funksiyalarning o'zgaruvchilari.

Endi bir nechta tipik misollarni yechib ko'rsatamiz.

Masala 1. Tenglamani xarakteristik tenglamasi va yechimini toping: $a^2u_{xx} - u_{yy} = 0$.

Yechish. Xarakteristik tenglamaning ko'rinishi quyidagicha: $a^2dy^2 - dx^2 = 0$.

Bu tenglamaning umumiy integrallari tenglik bilan aniqlanadi: $x = \pm ay + const$.

O'zgaruvchilarning almashtirish, $\xi = x + ay, \eta = x - ay$ ko'rib chiqilgan tenglamani kanonik shaklga keltiramiz: $u_{\xi\eta} = 0$.

Tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$u(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \Rightarrow u(x, y) = f_1(x + ay) + f_2(x - ay)$$

Masala 2. Tenglamani tipini aniqlang: $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x + u_y = 0$.

Yechish. Bu giperbolik tipdagi tenglamaga kiradi, chunki u

$$a^2 - a_{11}a_{22} = 1 + 1 * 3 = 4 > 0.$$

Masala 3. Oldingi misol shartlarida tenglamani kanonik shaklga keltiring.

Yechish. Giperbolik tenglamaning xarakteristik tenglamasi ikkita tenglamaga bo'linadi:

$$dy - 3dx = 0, dy + 3dx = 0.$$

Ushbu tenglamalarning umumiy integrallari: $3x - y = C_1, 3x + y = C_2$. Yangi o'zgaruvchi kiritsak: $\xi = 3x - y, \eta = 3x + y$. U holda:

$$u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = 3u_\xi + 3u_\eta, \quad (\xi_x = 3, \eta_x = 3),$$

$$u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = -u_\xi + u_\eta, \quad (\xi_y = -1, \eta_y = 1),$$

$$u_{xx} = 3(u_\xi + u_\eta)_\xi\xi_x + 3(u_\xi + u_\eta)_\eta\eta_x = 9u_{\xi\xi} + 18u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta} + u_{xy} =$$

$$3(u_\xi + u_\eta)_\xi\xi_y + 3(u_\xi + u_\eta)_\eta\eta_y = -3u_{\xi\xi} + 3u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = (-u_\xi + u_\eta)_\xi\xi_y + (-u_\xi + u_\eta)_\eta\eta_y = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Yangi o'zgaruvchili tenglama giperbolik tipdagi kanonik tenglama shaklini oladi:

$$15u_{\xi\eta} + u_{\xi} + 2u_{\eta} = 0.$$

Xususiy hosilali differensial tenglama tekshirilayotgan sohaning bir qismida elliptik tipga, ikkinchi qismida esa giperbolik tipga tegishli bo'lsa, tenglama aralash tipga tegishli deyiladi; bu qismlar o'tish chizig'i (yoki sirti) bilan ajraladi, bu chiziqda tenglama yoki parabolik buziladi, toki aniqlanmagan bo'ladi. Aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalani XX asrning 20-yillarida birinchi marra Italiyalik matematik Franchesko Trikomni

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

tenglama uchun qo'ygan va tekshirgan.

Biz bu bobda umumlashgan Trikomni

$$\text{signy}|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, m = \text{const} > 0 \quad (27)$$

tenglamasini o'rganamiz.

Bu tenglama $y = 0$ o'qining ixtiyoriy qismini o'z ichiga olgan sohada aralash tipga tegishli bo'ladi, ya'ni $y > 0$ yarim tekislikda elliptik, $y < 0$ da giperbolik bo'lib, $y = 0$ da parabolik buziladi. $m = 0$ bo'lganda (1) tenglama $\text{signy}u_{xx} + u_{yy} = 0$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Bu tenglamani aralash tipdagi tenglamalarning eng sodda vakili sifatida o'rganishni akademik M.A.Lavrentev tavsiya qilgan va uning uchun turli masalalarni akademik A.V.Bisadze tekshirgan. Shuning uchun ham bu tenglama Lavrentev – Bisadze tenglamasi deyiladi.

$y < 0$ yarim tekislikda (27) tenglama giperbolik tipga tegishli:

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (28)$$

Koshi masalasining qo'yilishi. Bizning asosiy maqsadimiz (28) tenglama uchun boshlang'ich shartlar parabolik buzilish chizig'ida berilganda Koshi masalasini o'rganishdir: (28) tenglamaning $y < 0$ da o'zining ikkinchi tartibgacha hosilalari bilan uzluksiz bo'lgan va $y = 0$ da o'qning biror qismida, masalan, $A(-1,0) B(1,0)$ kesmada

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = \tau(x), \quad (29)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial y} = v(x). \quad (30)$$

Shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ yechimi topilsin, bu yerda $\tau(x)$ va $v(x)$ – berilgan funksiyalar o'zlarining ikkinchi tartibgacha hosilalari bilan uzluksizdir. (2) tenglama

$$\xi = x - \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} \quad (31)$$

xarakteristik koordinatalarda ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{m}{2(m+2)} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{m}{2(m+2)} \frac{1}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad (32)$$

ko'rinishda yoziladi. (6) tenglama Eyler-Darbu tenglamasi deb ataluvchi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\alpha}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\beta}{\xi - \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \quad (33)$$

tenglamaning xususiy holidir, bu yerda α, β – ixtiyoriy o'zgarmaslar.

(31) almashtirish $y < 0$ da maxsus bo'lmagan almashtirishdir, shu bilan birga (31) $y < 0$ yarim tekislikka $\eta > \xi$ yarim tekislikni mos qo'yadi. $y = 0$ to'g'ri chiziq, ya'ni $\eta - \xi = 0$, bu almashtirishning maxsus chizig'idir. Ushbu $-\xi = \frac{4}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}}, \frac{\partial u}{\partial y} = (-y)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) =$

$\left(\frac{m+2}{4} \right)^{\frac{m}{m+2}} (\eta - \xi)^{\frac{m}{m+2}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$. (3), (4) boshlang'ich shartlar $\lim_{\eta \rightarrow \xi \rightarrow 0} u(\xi, \eta) = \tau(\xi)$,

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi \rightarrow 0} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{\frac{m}{m+2}} (\eta - \xi)^{\frac{m}{m+2}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = v(\xi) \quad (34)$$

ko'rinishda yoziladi.

Bizga ma'lumki, (33) Eyler-Darbu tenglamasini Riman funksiyasi $R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1)$ ushbu

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\alpha}{\xi - \eta} \frac{\partial R}{\partial \xi} - \frac{\beta}{\xi - \eta} \frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\alpha + \beta}{(\xi - \eta)^2} R = 0 \quad (35)$$

qo'shma differensial tenglamani qanoatlantiradi va $\xi = \xi_1, \eta = \eta_1$ karakteristikalarda

$$R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = e^{\int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\beta dt}{t - \eta_1}} = \left(\frac{\xi - \eta_1}{\xi_1 - \eta_1} \right)^{\beta} \quad (36)$$

qiymatlarni qabul qiladi.

$$R(\xi_1, \eta; \xi_1, \eta_1) = \left(\frac{\xi_1 - \eta}{\xi_1 - \eta_1} \right)^{\alpha} F|_{\xi=\xi_1}, \quad R(\xi, \eta_1; \xi_1, \eta_1) = \left(\frac{\xi - \eta_1}{\xi_1 - \eta_1} \right)^{\beta} F|_{\eta=\eta_1}.$$

Bu tengliklardan (36) ga asosan ko'rinyaptiki, $F|_{\xi=\xi_1} = F|_{\eta=\eta_1} = 1$ bo'lishi kerak. Bir qator hisoblashlardan so'ng, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\sigma(1 - \sigma)F_{\sigma\sigma} + [1 - (a + b + 1)\sigma]F_{\sigma} - \alpha\beta F = 0. \quad (37)$$

bunda $\sigma = \frac{(\xi - \xi_1)(\eta - \eta_1)}{(\xi_1 - \eta)(\xi - \eta_1)}$.

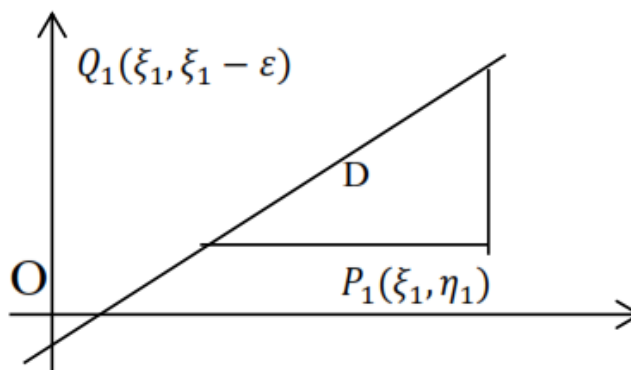
(37) tenglama Gauss tenglamasi bo'lib, uning yechimi gipergeometrik funksiya bo'ladi:

$F(\alpha, \beta, 1, \sigma) = F\left(\alpha, \beta, 1, \frac{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}{(\xi_1 - \eta)(\xi - \eta_1)}\right)$. $F|_{\xi=\xi_1} = F|_{\eta=\eta_1} = 1$ bo'lishidan quyidagi topamiz:

$$R(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) = (\xi - \eta)^{\frac{m}{m+2}} [(\xi - \eta_1)(\xi_1 - \eta)]^{-\frac{m}{2(m+2)}} * F\left(\frac{m}{2m+4}, \frac{m}{2m+4}, 1, \frac{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}{(\xi_1 - \eta)(\xi - \eta_1)}\right).$$

Yuqorida aytilganidek, $\eta - \xi = 0$ to'g'ri chiziq (31) almashtirish uchun maxsus chiziqdir, ya'ni bu chiziqda (32) tenglamaning koeffisientlari cheksizlikka intiladi. Shu bilan birga, $\xi \geq \eta + \varepsilon$ yarim tekislikda, bu yerda ε - ixtiyoriy musbat son, (32) tenglama uchun Koshi masalasi, biz yuqorida ko'rganimizdek, oddiy usul bilan yechiladi, Koshi masalasi, boshlang'ich shartlar $y = 0$ parabolik buzilish chizig'ida berilganda maxsus tekshirishni talab qiladi.

D orqali $\xi = \eta + \varepsilon, \varepsilon > 0$ chiziqning $Q(\eta_1 + \varepsilon, \eta_1)Q_1(\xi_1, \xi_1 - \varepsilon)$ kesmasi va (32) ning $QP: \eta = \eta_1$. $Q_1P: \xi = \xi_1$ karakteristikalari bilan chegaralangan sohani belgilaymiz (5-rasm).



5-rasm

(32) tenglama uchun Koshi masalasi yechimi quyidagicha (Салохитдинов М.С. Математик физика тенгламалари, Тошкент, «Ўзбекистон, 448 б.»):

$$u(x, y) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m}{2m+4}\right)} 2^{\frac{2}{m+2}} \int_{-1}^1 \tau \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} t \right] (1-t^2)^{-\frac{m+4}{2m+4}} dt +$$

$$2^{\frac{2}{m+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+4}{m+2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{m+4}{2m+4}\right)} y \int_{-1}^1 v \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} t \right] (1-t^2)^{-\frac{m}{2m+4}} dt \quad (38)$$

formula hosil qilamiz. (38) formula Darbu formulasi deyiladi.

MUHOKAMA

Yuqorida aytib o‘tilganidek, oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining paydo bo‘lishi XVIII asrlarga borib taqaladi. Aksariyat jarayonlarning (fizik, biologik, mexanik, kimyoviy, iqtisodiy, ekologik va shu kabilarning) matematik modellari oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar [1-16] orqali ifodalanadi.

Mazkur maqolada olib borilgan ilmiy izlanishlar yo‘nalishida boshqa mualliflar tomonidan ham bir qator maqolalar [17-53] chop qilingan. Ushbu maqolalarda xususiy hosilali differensial tenglamalar, xususan aralash tipga tegishli tenglamalar o‘rganilgan. Energiya integrali, integrallar nazariyasi, ketma-ket yaqinlashish, prinsipi, singulyar integral tenglamalar nazariyasi, potentsiallar nazariyasi, maxsus funksiyalar – Eylerning Gamma va Beta funksiyalari, Riman funksiyasi, gipergeometrik funksiyalar, Arsel teoremasi, Dyamel va Shauder prinsiplari, Vishik lemmasi, birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi, chiziqli fazolar, ortogonal funksiyalar va ularni ortonormalashtirish jarayonidan keng foydalanilgan.

XULOSA

Ushbu mavzu va boshqa maxsus fanlarni o‘qitishda interfaol usullarni [54-57] qo‘llash tavsiya qilingan bo‘lib, ularda bir qator uslubiy tavsiyalar berilgan. O‘z navbatida talabalar tomonidan nazariy va amaliy mashg‘ulotlarda ilg‘or pedagogik texnologiyalarni qo‘llash ijobiy baholangan. Chunki interfaol usullar talabalarni ijodiy fikrlashga va izlanishga undaydi. Mavzuni oson tushunishlariga qulaylik tug‘diradi.

REFERENCES

1. Раупова, М. (2021). Роль математики в биологических науках. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
2. Раупова, М. (2021). Математические модели и законы в биологии. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
3. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
4. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
5. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
6. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.
7. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.
8. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.
9. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с не-прерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.
10. Расулов Х.Р., Ф.М. Джуракулова (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress. 2:1, 455-462 бетлар.
11. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.23-26.
12. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Об одном квадратично стохастическом операторе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 у., p.145-146.
13. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об одной динамической системе с непрерывным временем // «The XXI Century Skills for Professional Activity» International Scientific-Practical Conference, Tashkent, mart 2021 у., p.115-116.
14. Rasulov Kh.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy // Irish Interdisciplinary Journal of Science & Research (IJSR), 6:2 (2022), p. 8-14. DOI: <http://doi.org/10.46759/IJSR.2022.6202>.
15. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
16. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
17. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
18. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.

19. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
20. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.
21. Расулов Х.Р. Об одной нелокальной задаче для уравнения гиперболического типа // XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019, с. 197-199.
22. Расулов Т.Х., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.
23. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
24. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
25. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. О существовании обобщенного решения краевой задачи для нелинейного уравнения смешанного типа // Вестник науки и образования, 97:19-1 (2020), С. 6-9.
26. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегося квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века. 53:6-1, 2019. С.16-18.
27. Rasulov, X. (2022). Об одной динамической системе с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).
28. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18), https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/7328.
29. Rasulov, R. X. R. (2022). Ikkita perpendikulyar buziliش chizig'iga ega бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22), https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/7996.
30. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
31. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida // «Zamonaviy ta'lim tizimini rivojlantirish va unga qaratilgan kreativ g'oyalar, takliflar va yechimlar», 35-sonli Respublika ilmiy-amaliy on-line konferensiyasi, 2022, 192-195 b.
32. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida // Models and methods for increasing the efficiency of innovative research, Germany, 10 (2022), p. 184-186.
33. Rasulov X.R., Sayfullayeva Sh.Sh. (2022) Ikkita buzilish chizig'iga ega kvazichiziqli elliptic tenglama uchun chegaraviy masala haqida // Central Asian Academic Journal Of Scientific Research, 2(5), 544-557 b.

34. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
35. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8), https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/5675.
36. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18), https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/7320.
37. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
38. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8), https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/5674.
39. Rasulov, X. (2022). Об одной задаче для вырождающейся квазилинейного уравнения гиперболического тип. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18), https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/7319.
40. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7), https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/3637.
41. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18), https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/7317.
42. Rasulov, R. X. R. (2022). Квази чизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
43. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
44. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
45. Rasulov, R. X. R. (2022). О краевых задачах для уравнений эллиптического типа с линией искажения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8), https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/5677.
46. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
47. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo'yicha ba'zi uslubiy ko'rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5), https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/2507
48. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta'limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5), https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/2506
49. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5), https://journal.buxdu.uz/index.php/journals_buxdu/article/view/2504.

50. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).
51. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning to'la o'zgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).
52. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
53. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // *Journal of Physics: Conference Series* 2070 012002 (2021), pp.1–11.
54. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Модуль қатнашган баъзи тенглама, тенгсизлик ва тенгламалар системаларини ечиш йўллари // *Science and Education, scientific journal*, 2:9 (2021), p.7-20
55. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим рационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши ҳақида // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p. 586-595
56. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Айрим иррационал тенгламаларни ечишда интерфаол усулларни қўлланилиши // *Science and Education, scientific journal*, 2:10 (2021), p.596-607.
57. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // *Наука, техника и образование*, 72:8 (2020) с.29-32.