S.N.BERNSHTEYNNING LOKAL TENGSIZLIGI HAQIDA

Musayev Abdumannon Ochilovich
Dotsent, O‘zbekiston Milly Universiteti Jizzax filiali

https://doi.org/10.5281/zenodo.7133448

Annotatsiya. *Ushbu maqolada S.N.Bernshteyn tengsizliginig biror tayin nuqta atrofidagi lokal analogi isbotlangan.*

Kalit so’zlar: *trigonometrik ko’phad, Bernshteyn va Zigmund tengsizligi, nuqtaning η – atrofi.*

О ЛОКАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ С.Н.БЕРНШТЕЙНА

Аннотация. *В статье доказывается локальный аналог неравенства С. Н. Бернштейна относительно фиксированной точки.*

Ключевые слова: *тригонометрический полином, неравенство Бернштейна и Зигмунда, η - окружность точки.*

ON THE S. N. BERNSTEIN'S LOCAL INEQUALITY

Abstract. *In this article, a local analogue of S. N. Bernstein's inequality around a fixed point is proved.*

Keywords: *trigonometric polynomial, Bernstein's and Sigmund's inequality, η - circumference of a point.*

KIRISH

Matematik tahlilda asosiy o‘rin tutuvchi funksiyalar nazariyasining muhim tarmoqlaridan biri yaqinlashish nazariyasi hisoblanad. Bu nazariya asoslarining qo‘yilishi va rivojlanishi uch buyuk matematiklar – K.Veyershtrass, P.L.Chebishev va S.N.Bernshteyn nomlari bilan bog‘liq [1–5]. Shu sababli avvalo funksiyalar nazariyasidagi ushbu muhim teoremani keltirish joyiz deb hisoblash kerak bo‘ladi.

Veyershtrass teoremasi(1885 y.). $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgn har qanday $f(x)$ funksiya uchun $\varepsilon > 0$ son istalgancha kichik bo’lganda ham shunday n - darajali $P_n(x)$ algebraik ko‘phad topiladiki, barcha $x \in [a,b]$ nuqtalarda quyidagi tengsizlik o’rinli bo‘ladi:

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Bu teorema shuni tasdiqlaydiki, biror kesmada uzluksiz bo‘lgan har bir funksiyani istalgan aniqlikda algebraik kop‘hadlar bilan yaqinlashtirish mumkin. Bu tasdiq uzluksiz funksiyaning xossalari bilan shu funksiyaga ko‘phadlarning yaqinlashish tezligi orasidagi bog‘lanishni aniqlash imkoniyatini beradi. Shu sababli ko‘phadlarning bir xil yaqinlashish tezligiga ega bo‘lgan funksiyalar muayyan funksiyalar sinfini tashkil qiladi.

Ko‘phadlar bilan funksiyaga yaqinlashish tezligiga funksiyaning qanday xossalari ta‘sir qilishini aniqlash haqdagi teoremalarga yaqinlashish nazariyasining to‘g‘ri teoremalari deyiladi. Aksincha, ko’phadlar bilan ma‘lum bir yaqinlashish tezligiga ega bo‘lgan funksiyalar sinfini aniqlash teoremalariga esa yaqinlashish nazariyasining teskari teoremalari deyiladi[1,2].

Bernshteyn tengsizliklari deb ataluvchi natijalar yaqinlashish nazariyasining teoremalarini isbotlashda qo‘llaniladi [2–6].

Matematik tahlil asoslari, shu jumladan funksiyalar nazariyasining natijalari hozirgi zamon matematkasining barcha sohalarida o‘z tadbiqlarini topmoqda. Ayniqsa, amaliy matematikaning zamonaviy yo‘nalishlarida, dinamik boshqaruv tizimlarida, iqtisodiyotdagi masalalarni matematik modellashtirish, prognoz va qaror qabul qilish, optimal boshqaruv tizmlari sintezi va boshqa ko‘plab masalarni tadqiq etihda samarali qo‘llanilmoqda[7–12].

TADQIQOT MATERIALLARI VA METODOLOGIYASI

$T_n(x)$ bilan tartibi n dan katta bo‘lmagan trigonometrik ko‘phadni belgilaymiz. Ma’lumki, S.N.Bernshteyn 1912 yilda quyidagi ajoyib tengsizlikni isbotlagan ([1], 47 b, [2]).

1-teorema. *Agar $T_n(x)$- tartibi n dan katta bo‘lmagan trigonometrik ko‘phad bo‘lib va ixtiyoriy $x \in [0,2\pi]$ uchun*

$$|T_n(x)| \leq M$$

tengsizligi bajarilsa, u holda barcha $x \in [0,2\pi]$ uchun

$$|T_n'(x)| \leq M \cdot n$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Bu natija A.Zigmund tomonidan L^p fazoga ko‘chirildi ([3]):

2-teorema. *Agar $T_n(x)$- tartibi n dan katta bo‘lmagan trigonometrik ko‘phad bo‘lib va ixtiyoriy $x \in [0,2\pi]$ uchun*

$$\|T_n\|_p \leq M$$

Tengsizligio’rinli bo’lsa, u holda $x \in [0,2\pi]$ uchun

$$\|T_n'\|_p \leq M \cdot n$$

tengsizlik o‘rinli.

I.I.Privalov[4] quyidagi

$$\|T_n'\|_{C([a',b'])} \leq C(a',b')\|T_n\|_{C([a,b])}$$

tengsizlikni isbotlagan, bu yerda $\forall[a',b'] \subset [a,b]$ va C o‘zgarmas faqat a',b' sonlarga bog‘liq.

Bu tengsizlikga S.N.Bernshteyn tengsizliginig lokal analogi deyiladi. D. Jackson [5] bu tengsizlikni I.I.Privalovga bog‘liq bo‘lmagan holda qayta isbotlagan.

TADQIQOT NATIJALARI

$x_0 \in [0,2\pi]$ berilgan nuqta. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$O_\eta(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x \in [0,2\pi]: |x - x_0| < \eta\}, (\eta \leq \pi)$$

Odata bu to‘plam x_0 nuqtaning “η – atrofi” deyiladi.

Bu maqolada quyidagi teorema isbotlangan.

3-теорема. *Agar $T_n(x)$- tartibi n dan katta bo‘lmagan trigonometrik ko‘phad bo‘lib va ixtiyoriy $x \in O_\eta(x_0)$ uchun*

$$|T_n(x)| \leq M$$

tengsizligi bajarilsa, u holda har bir $x \in O_\eta(x_0)$ uchun

$$|T_n'(x)| \leq const \cdot M \cdot \frac{n}{\eta}$$

tengsizlik o‘rinli, bu yerda const – o‘zgarmas son n, η - larga bog‘liq emas.

Bu teoremani isbotlash uchun quyidagi lemmadan foydalanamiz.

Лемма([6]). *Agar $T_n(x)$- tartibi n dan katta bo‘lmagan trigonometrik ko‘phad bo‘lib va ixtiyoriy $x \in O_\eta(x_0)$ uchun*

$$|T_n(x)| \leq M$$

va shunday $\bar{x} \in O_\eta(x_0)$ topilib $T_n(\bar{x}) = M$ bo‘lsa, u holda $-\frac{\eta}{n} \leq t \leq \frac{\eta}{n}$ lar uchun $T_n(\bar{x} + t) \geq M \cos\frac{n}{\eta}t$

tengsizligi o'rinli.

3-teoremaning isboti. Teorema shartiga ko'ra $\forall x \in O_\eta(x_0)$ uchun

$$|T_n(x)| \le M.$$

Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} max|T_n'(x)|.$$

Faraz qilaylik, $O_\eta(x_0)$ to'plamda shunday $\bar{x}$ nuqta mavjudki, bu nuqtada $T_n(x)$ trigonometrik ko'phad maksimumga erishsin, ya'ni

$$|T_n'(x)| = \mu.$$

U holda yuqorida isbot qilingan lemmaga asosan $-\frac{\eta}{n} < t < \frac{\eta}{n}$ tengsizligini qanoatlantiruvchi t lar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$T_n(\bar{x} + t) \ge M \cos\frac{n}{\eta} t.$$

Unda

$$T_n\left(\bar{x} + \frac{\eta}{2n}\right) - T_n\left(\bar{x} - \frac{\eta}{2n}\right) = \int_{-\frac{\eta}{2n}}^{\frac{\eta}{2n}} T_n'(\bar{x} + t)\, dt \ge \mu \int_{-\frac{\eta}{2n}}^{\frac{\eta}{2n}} \cos\frac{n}{\eta} t\, dt =$$

$$= \mu\frac{\eta}{n}(\sin\frac{n}{\eta}t)\ \Big|_{-\frac{\eta}{2n}}^{\frac{\eta}{2n}} = \mu\frac{\eta}{n}\left[\sin\frac{n}{\eta}\frac{\eta}{2n} - \sin\frac{n}{\eta}\left(-\frac{\eta}{2n}\right)\right] = \mu\frac{\eta}{n}\left[\sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{2}\right] =$$

$$= C \cdot \mu\frac{\eta}{n}.$$

Bu yerdan

$$\mu \le \frac{1}{C} \cdot \frac{n}{\eta}\left[T_n\left(\bar{x} + \frac{\eta}{2n}\right) - T_n\left(\bar{x} - \frac{\eta}{2n}\right)\right].$$

Biroq, $\forall x \in O_\eta(x_0)$ uchun $|T_n(x)| \le M$ ekanliligini e'tiborga olsak quyidagini olamiz

$$\mu \le \frac{1}{C} \cdot \frac{n}{\eta} 2M.$$

Shunday qilib,

$$|T_n'(x)| \le const \cdot M \cdot \frac{n}{\eta},$$

bu yerda $const$ – o'zgarmas son n, η - larga bog'liq emas. Shunday qilib, teorema isbot qilindi.

MUHOKAMA

S.N.Bernshteyn va A.Zigmund tengsizliklari funksiyaga trigonometrik ko'phadlarning eng yaxshi yaqinlashishni o'rganishda, hamda Fure qatoiri va uning qo'shmasining yaqinlashishi o'rganishda keng qo'llaniladi. Bu tengsizliklardan foydalana olish uchun berilgan funksiyaning uzunligi 2π ga teng kesmada qanday xossalarga ega ekanliligini bilish zarur bo'ladi. Agar izlanishlar uzunligi 2π dan kichik $[a, b]$ kesmada olib borilsa S.N.Bernshteyn va A.Zigmund teoremalari o'z kuchini yo'qotadi.

XULOSA

Yuqorida keltlgan S.N.Bernshteyn va A.Zigmund lokal tengsizliklarida qatnashgan o'zgarmaslar berilgan kesmada yotuvchi kesma uchlari a', b' sonlarga bog'liq. Isbot qilingan teoremadagi tengsizlikda esa belgilab olingan tayin nuqtaning atrofi aniq ko'rsatilgan.

REFERENCES

1. Н.К.Бари. Тригонометрические ряды, Москва, Гос.издат.Физ-мат. 1961, 936 стр.
2. С.Н.Бернштейн. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьк. Мат. Общ. (2),13 (1912). с.49-144.
3. A.Zigmund. A remark on conjugate series, Proc. Lond. Math. Soc.,34 (1952). c. 392-400.
4. И.И.Привалов. Интеграл Коши, Саратов, 1919.
5. Jackson D., A generalized problem in weighted approximation, Trans. Amer. Math. Soc., 26 (1924). c. 133-154.
6. Musayev A.O. S.N.Bernshteynning lokal tengsisligi. Zamonaviy innovatsion tadqiqotlarning dolzarb muommalaari va rivojlanish tendensiyalari: yechimlar va istiqbollar. Respublika mintaqaviy ilmiy-texnik anjuman materiallar to'plami. Jizzax, 13-14 may 2022 y. 355-358 b.
7. Otakulov S.,Haydarov T.T. The nonsmooth control problem for dynamic system with parameter under conditions of incomplete initial date. International Conference On Innovation Perspectives, Psychology and Social Studiees(ICIPPCS-2020), may 11-12 2020. International Enjineering Journal for Research & Development(IEJRD). pp. 211-214
8. Otakulov S. The control problems of ensemble trajectories for differential inclusions. LAP Lambert Academic Publishing, 2019.
9. Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. About the conditions of optimality in the minimax problem for controlling differential inclusion with delay. Academica: An International Multidisciplinary Research Jounal,Vol.10, Issue 4 (April 2020). pp. 685–694. DOI.10.5958/2249-7137.2020.00133.0
10. Отакулов С., Мусаев А.О. Применение свойства квазидифференцируемости функций тпа минимума и максимума к задаче негладкой оптимизации.Colloqium-journal. Miedzynarodowe czasopismo naukowe. № 12(64), Warsawa(Polska), 2020. c. 55-60. DOI. 10.24411/2520-6990-2020-11795.
11. Otakulov S., Musayev A.O. On the mathematical methods in the problems of forecasting and decision making in the conditions of incompleteness of information. Proceedings of international multidisciplinary Scientific-remote Online conference on innovative Solutions and Advanced Experiments.Samarkand, Uzbekistan, June 18-19 2020.JournalNX- A Multidisciplinary Peer Reviewed Journal. pp. 495-500.
12. Otakulov S., Musayev A. O., Abdiyeva H.S. Application the mathematical methods in the problem of decision making under informational constraints. Proceedings of Scholastico-2021, International Consortium on Academic Trends of Education and Science, April 2021. London, England. pp. 105-107.