# НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО НАХОЖДЕНИЮ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**Рахматиллаев Есунбек Нематилла угли**
Наманганский инженерно-строительный институт
**Тиллабоев Едгоржон Кенжабоевич**
Наманганский инженерно-строительный институт
https://doi.org/10.5281/zenodo.7063951

***Аннотация.*** *В данной статье даны некоторые методические советы по нахождению локального экстремума функций многих переменных. В этих целях, сначала приведены несколько типичных примеров по вычисление частных производных функций. Изложены определение и необходимые условия локального экстремума, некоторые сведения о квадратичных формах и достаточные условия локального экстремума. Для укрепления перечислены контрольные вопросы и задания. Предложено методика преподавания темы по нахождения локального экстремума функций многих переменных.*

***Ключевые слова:*** *функции многих переменных, вычисление, частная производная, локальный экстремум, необходимые условия локального экстремума, достаточные условия локального экстремума, дифференциал функции, выпуклая область, отрезок, дифференцируемая функция, квадратичная форма, окрестность точки.*

# SOME METHODOLOGICAL RECOMMENDATIONS FOR FINDING THE LOCAL EXTREMUM OF FUNCTIONS OF MULTIPLE VARIABLES

***Abstract.*** *This article gives some methodological advice on finding the local extremum of functions of several variables. To this end, first some typical examples on the calculation of partial derivatives of functions are given. The definition and necessary conditions for a local extremum, some information about quadratic forms, and sufficient conditions for a local extremum are presented. For strengthening, control questions and tasks are listed. A technique for teaching the topic of finding a local extremum of functions of several variables is proposed.*

***Keywords:*** *functions of several variables, calculation, partial derivative, local extremum, necessary conditions for a local extremum, sufficient conditions for a local extremum, differential of a function, convex domain, segment, differentiable function, quadratic form, neighborhood of a point.*

## ВВЕДЕНИЕ

В Узбекистане среднее и высшее образование в находиться в состоянии активного изменения, которые сопровождаются внедрением новых педагогических образовательных и информационных технологий при обучении всех предметов, в том числе и математики, с сравнительным анализом зарубежным опытом.

Национальная программа образования Узбекистан в основном направлена на обновление содержания образования с целью повышения качества и эффективности её. Известно, что улучшение содержания образования требует улучшить обучение на протяжении всей жизни, повысить эффективность среднего и высшего образования и разработать всесторонне развитое поколение для общества. С учетом этого, проблемы преподавания математики в ВУЗе заключаются в пересмотре огромного опыта, связанного с активизацией обучения студентов.

Из опыта известно, что студенты интересуются нахождению локальных экстремумов функций одной переменной, так и многих переменных, их важностью и стараются изучить их более глубоко. Поскольку нынешний век — это век компьютерных технологий, решение задач численными методами получило широкое развитие, а также возросла роль численного опыта. В свою очередь, возрос интерес и к нахождению локальных экстремумов функций многих переменных. Это связано с двумя условиями. Во-первых, для определения относительной роли отдельных явлений часто бывает необходимо упростить исходную задачу, чтобы разработать математическую модель физического явления и получить решение в легко анализируемом аналитическом виде. Во-вторых, на упрощенных задачах удобно выбирать надежные и эффективные алгоритмы расчета для решения сложных задач на ЭВМ. Поэтому во многих случаях возникают проблемы, которые приводят к нахождению экстремальных значениях. Кроме того, для понимания многих важных вопросов теоретической и прикладной физики необходимо глубокое знание их критические значение.

**МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ**

Для нахождение экстремумов функций многих переменных требуются хорошее знание по вычисления их частных производных. В этой связи, приведем примеры по вычислению частных производных функций многих переменных.

**Пример 1.** Найти частные производные до второго порядка функции $u = f(x + y, xy)$ в точке $M(x, y)$, если $x$ и $y$ — независимые переменные.

**Решение.** Запишем данную функцию в виде $u = f(t, v)$, где $t = x + y, v = xy$. Используя эти обозначения, находим:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f_t(x + y, xy) + f_v(x + y, xy) \cdot y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_t(x + y, xy) + f_v(x + y, xy) \cdot x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{tt} + f_{vt} \cdot y + f_{vt} \cdot y + f_{vv} \cdot y^2 = f_{tt} + 2y f_{tv} + y^2 f_{vv},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f_{tt} + f_{vt} \cdot x + f_{vt} \cdot y + f_{vv} \cdot xy + f_v = f_{tt} + (x + y) f_{tv} + xy f_{vv} + f_v,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{tt} + f_{vt} \cdot x + f_{vv} \cdot x^2 = f_{tt} + 2x f_{vt} + x^2 f_{vv}.$$

**Пример 2.** Найти частные производные до второго порядка функции $f(x , y) = e^{x/y}$ в точке $M_0(0,1)$ до членов второго порядка, включительно.

**Решение.** Сначала находим частные производные функции $f(x, y)$ до второго порядка, включительно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x/y} \cdot \frac{1}{y}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x/y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x/y} \cdot \frac{1}{y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{x/y} \cdot \left(-\frac{x}{y^3}\right) + e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x/y} \cdot \frac{x^2}{y^4} + e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{2x}{y^3}.$$

Так, в точке $M_0(0,1)$ имеем

SCIENCE AND INNOVATION
INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL VOLUME 1 ISSUE 5
UIF-2022: 8.2 | ISSN: 2181-3337

$f(M_0) = 1, \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 1, \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0,$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = 0.$

Для закрепления пройденной темы, предлагается выполнять следующие задачи дома.

**1.** Найдите частные производные второго порядка следующих функций;

а) $u = x^3 + y^4 + 2x^3y^4$; б) $u = xy^2z^3 + \frac{x}{y^2z^3}$; в) $u = cos(xy)$;

г) $u = sin(x + yz)$; д) $u = arctg\frac{y}{z}$; е) $u = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{x+z}$;

ж) $u = x^{yz}$; з) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

**2.** Докажите, что функция $\mathrm{u}(x, y) = \begin{cases} xy & \text{при } |y| \le |x| \\ -xy & \text{при } |y| > |x| \end{cases}$, имеет в точке $\mathrm{O}(0,0)$ смешанные частные производные второго порядка, но

$$u_{xy}(0,0) \neq u_{yx}(0,0).$$

**3.** Докажите, что если функция $u = f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ частные производные $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$ и смешанная частная производная $f_{xy}(x, y)$ непрерывна в $M_0$, то в этой точке существует смешанная частная производная $\mathrm{f}_{\mathrm{yx}}$ и справедливо равенство $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.

**4.** Найдите частные производные указанного порядка:

а) $\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial y}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, если $u = sin\, xy$,

б) $\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial x^4}$, если $u = x^4 \cos y + y^4 \cos x$; в) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, если $u = e^{xyz}$;

г) $\frac{\partial^{10} u}{\partial x^4 \partial y^6}$, если $u = \sin x \cos 2y$; д) $\frac{\partial^{m+x} u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = x^m y^n$;

е) $\frac{\partial^{m+x} u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = e^{2x} \sin y + e^x \cos\frac{y}{2}$;

ж) $\frac{\partial^{10} u}{\partial x \partial y^9}$, если $u = (x^2 + y)^{10} tg\, x$, з) $\frac{\partial^{m+x} u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = \frac{x+y}{x-y}$.

**5.** Найдите частные производные второго порядка следующих функций (функции f и g считаются дважды дифференцируемыми):

а) $u = f(x + y, x^2 + y^2 + x)$; б) $u = f\left(xy, \frac{5x}{y+1}\right)$; в) $u = f(4xy)g(xz)$;

г) $u = ln\, f(x, x + y)$; д) $u = f(sin\, x + 2cos\, y)$; е) $u = [f(x)]^{g(y)}$.

**6.** В каждом из следующих случаев проверьте, что данная функция удовлетворяет заданному уравнению, если $f$ и $g$ — произвольные дважды дифференцируемые функции:

а) $u = f(x - at) + g(x + at)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

б) $u = xf(x + y) + yg(x + y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

в) $u = f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

г) $u = x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} g\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$;

д) $u = f\big(x + g(y)\big)$, $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

**7.** Вычисляя частные производные первого и второго порядков и исключая производные функции $f$ и $g$ ($f$ и $g$ произвольные дважды дифференцируемые функции), составьте уравнение, которому удовлетворяет функция $u(x, y)$, если

а) $u = f(x) + g(y)$; б) $u = f(x)g(y)$;

в) $u = f(x + y) + g(x - y)$; г) $u = f(xy) + g\left(\frac{y}{x}\right)$.

**8.** Найдите частные производные второго порядка следующих функций в указанных точках, если $f -$ дважды дифференцируемая функция, $x, y, z -$ независимые переменные:

а) $u = f(x - y, x + y)$ в точках $M(x, y)$ и $M_0(1,1)$;

б) $u = f(x + y, z^2)$ в точках $M(x, y, z)$ и $M_0(1, -1, 0)$;

в) $u = f(xy, x^2 + y^2)$ в точках $M(x, y)$ и $O(0,0)$;

г) $u = \sin f(x) \cdot e^{f(y)}$ в точках $M(x, y)$ и $O(0,0)$.

Теперь переходим к изложению основной темы.

Пусть функция $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$.

**Определение.** Говорят, что функция $u = f(M)$ имеет в точке $M_0$ локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки $M_0$, в которой при $M \neq M_0$ выполняется неравенство

$$f(M) < f(M_0) \; \big(f(M) > f(M_0)\big).$$

Если функция имеет в точке $M_0$ локальный максимум или локальный минимум, то говорят также, что она имеет в этой точке локальный экстремум (или просто экстремум).

**Теорема 1** (необходимое условие экстремума). Если функция $u = f(m) = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ локальный экстремум и в этой точке существует частная производная функции по аргументу $x_k$, то $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0$.

**Следствие.** Если функция $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ имеет в точке $M_0$ локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то

$$du|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m = 0$$

(при любых значениях дифференциалов независимых переменных $dx_1, \dots, dx_m$).

Точки, в которых первый дифференциал функции равен нулю, принято называть точками возможного экстремума этой функции. Для отыскания точек возможного экстремум а функции $u = f(x_1, \dots, x_m)$ нужно решить систему уравнений $f_{x_1}(x_1, \dots, x_m) = 0, \dots, f_{x_m}(x_1, \dots, x_m) = 0$ (это система $n$ уравнений с $n$ неизвестными $x_1, \dots, x_m$) (Бутузов В.Ф. и др. Математический анализ в вопросах и задачах. Москва, Физматлит, 2001 г., 480 с.).

Отметим, что для решения систем алгебраических уравнений необходимо знать о свойствах квадратичных формах. Приведем некоторые сведения о квадратичных формах.

Функция вида

$$Q(x_1, \dots, x_m) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1m}x_1x_m + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{mm}x_m^2$$

(или, в краткой записи, $Q = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_ix_j$), где $a_{ij}$ — числа, причем $a_{ij} = a_{ji}$, называется квадратичной формой от переменных $x_1, \dots, x_m$.

Числа $a_{ij}$ называются коэффициентами квадратичной формы, а составленная из этих коэффициентов симметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2m} \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

- матрицей квадратичной формы.

Определители

$$\delta_1 = a_{11}, \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots., \ \delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots a_{1k} \\ a_{k1} & \cdots a_{kk} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots a_{1m} \\ a_{m1} & \cdots a_{mm} \end{vmatrix}$$

называются угловыми минорами матрицы А.

Квадратичная форма $Q(x_1, \ldots., x_m)$ называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для любых значений переменных $x_1, \ldots., x_m$, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения.

Отметим, что $Q(0,0, \ldots,0) = 0$.

Например, $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 -$ положительно определенная квадратичная форма, так как $Q(x_1, x_2) > 0$ во всех точках $(x_1, x_2)$, кроме точки $(0,0)$.

Квадратичная форма называется знакоопределенной, если она является либо положительно определенной, либо отрицательно определенной.

Квадратичная форма $\mathrm{Q}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{m})$ называется квазизнакоопределенной, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, но при этом обращается в нуль не только при $x_1 = \ldots = x_m = 0$.

Например, $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ — квазизнакоопределенная квадратичная форма, поскольку $Q(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 \geq 0$ во всех точках $(x_1, x_2)$, но $Q(x_1, x_2) = 0$ не только в точке $(0,0)$; так $Q(1, -1) = 0$.

Квадратичная форма $Q(x_1, \ldots, x_m)$ называется знакопеременной, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Например, $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2x_2^2 -$ знакопеременная квадратичная форма, поскольку она принимает как положительные, так и отрицательные значения: $Q(1,0) = 1 > 0, Q(0,1) = -1 < 0$.

Для определения знака квадратичной формы имеется мощный математический аппарат критерий Сильвестера.

Изложим критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.

1°. Для того чтобы квадратичная форма $Q(x_1, \ldots, x_m)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны: $\delta > 0, \delta_2 > 0, \ldots, \delta_m > 0$.

2°. Для того чтобы квадратичная форма $Q(x_1, \ldots, x_m)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом: $\delta_1 < 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 < 0$, $\delta_4 > 0, \ldots$

Теперь подробно изложим достаточные условия локального экстремума. Второй дифференциал функции $u = f(x_1, .., x_m)$, где $x_1, .., x_m$ — независимые переменные, в точке $\mathrm{M}_0$ можно записать в виде

$$d^2u|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j.$$

Это выражение показывает, что второй дифференциал функции $u = f(x_1, .., x_m)$, в данной точке $M_0$ является квадратичной формой от переменных $dx_1, .., dx_m$, а частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ – коэффициентами этой квадратичной формы.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2** (достаточные условия экстремума). Пусть функция $u = (M) = f(x_1, .., x_m)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ и дважды дифференцируема в самой точке $M_0$, причем $M_0$ — точка возможного экстремума данной функции, т.е. $d^2u|_{M_0} = 0$. Тогда если второй дифференциал $d^2u|_{M_0}$ является положительно определенной ( отрицательно определенной) квадратичной формой от переменных $dx_1, .., dx_m$, то функция $u = f(M)$ имеет в точке $M_0$ локальный минимум (максимум). Если же $d^2u|_{M_0}$ является знакопеременной квадратичной формой, то в точке $M_0$ функция $u = f(M)$ не имеет локального экстремума.

Наметим, что если $d^2u|_{M_0} = 0$, а $d^2u|_{M_0}$ является квазизнакоопределенной квадратичной формой, то функция $u = f(M)$ может иметь в точке $M_0$ локальный экстремум, а может и не иметь его.

Например, для каждой из функций $u = x^4 + y^4$ и $u = x^3y^3$ в точке $O(0,0)$ выполнены условия $du = 0$, $d^2u = 0$ (т.е. второй дифференциал является квазизнако-определенной квадратичной формой). Но при этом первая функция имеет, очевидно, в точке $O$ локальный минимум, а вторая функция не имеет экстремума в точке $O$.

Для простоты необходимо студентам объяснять случай функции двух переменных. Пусть функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и дважды дифференцируема в самой точке $M_0$, причем $M_0$ — точка возможного экстремума данной функции, т.е. $d^2u|_{M_0} = 0$.

Введем обозначения:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0), a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0), a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0).$$

Тогда из теоремы 2 и критерия Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы следуют утверждения:

1) если $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то в точке $M_0$ функция $u = f(x, y)$ имеет локальный экстремум (максимум при $a_{11} < 0$ и минимум при $a_{11} > 0$);

2) если $D < 0$, то в точке $M_0$ функция $u = f(x, y)$ не имеет экстремума;

3) если $D = 0$ то в точке $M_0$ функция $u = f(x, y)$ может иметь локальный экстремум, а может и не иметь его.

**РЕЗУЛЬТАТЫ**

Теперь приведем типичные примеры для нахождения локального экстремума функции многих переменных.

**Пример 1.** Найдите точки локального экстремума функции

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$$

**Решение.** Для нахождения точек возможного экстремума данной функции вычисляем ее частные производные и приравниваем их нулю:

$$u_x = 4x - y + 2z = 0, u_y = -x - 1 + 3y^2 = 0, u_z = 2x + 2z = 0.$$

Решая эту систему трех уравнений, находим две точки возможного экстремума: $M_1(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ и $M_2(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$.

Далее воспользуемся достаточными условиями экстремума. Для этого вычислим частные производные второго порядка данной функции: $u_{xx}=4, u_{xy}=u_{ux}=-1, u_{xz}=u_{zx}=2, u_{yy}=6y, u_{yz}=u_{zy}=0, u_{zz}=2.$

Значения этих частных производных в точке $M_1$ являются коэффициентами $d^2u|_{M_1}-$ квадратичной формы от переменных $dx, dy, dz$. Матрица этой квадратичной формы имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычисляя главные миноры матрицы A, получаем

$$\delta_1=4>0, \delta_2=\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=15>0, \delta_3=\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=14>0.$$

Согласно критерию Сильвестра $d^2u|_{M_1}$ является положительно определенной квадратичной формой от переменных $dx, dy, dz$. Следовательно, в точке $M_1$ функция имеет локальный минимум.

Исследуем теперь точку $M_2$. Матрица квадратичной формы $d^2u|_{M_2}$ имеет вид

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем $\delta_1=4>0, \delta_2=-13<0, \delta_3=-14<0.$

Следовательно, $d^2u|_{M_2}$ не является знакоопределенной квадратичной формой от $dx, dy, dz$. Нетрудно видеть, что эта квадратичная форма знакопеременная. В самом положить $dx\neq 0, dy=dz=0,$ то получим $d^2u|_{M_2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(M_2)dx^2=4dx^2>0$, а если положить $dx=dz=0, dy\neq 0,$ то получим $d^2u|_{M_2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_2)dy^2=-3dy^2<0$ Следовательно, в точке $M_2$ функция не имеет локального экстремума.

**Пример 2.** Найти точки локального экстремума функции $u=x^2-2xy+4y^3$ .

**Решение.** Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$u_x=2x-2y=0, \qquad u_y=-2x+12y^2=0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем две точки возможного экстремума $M_1(0{,}0)$ и $M_2(1/6\,,1/6)$.

Далее находим частные производные второго порядка: $u_{xx}=2, u_{xy}=-2, u_{yy}=24y$

В точке $M_1$:

$$a_{11}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_1)=2, a_{12}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_1)=2, a_{22}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_1)=0$$

Следовательно, $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^1=4<0$, и, значит, в точке $M_1$ функция не имеет локального экстремума.

В точке $M_2$:

$$a_{11,}=2, a_{12}=-2, a_{22}=4.$$

Следовательно, $D = 2\,4 - (-2)^2 = 4 > 0$ и так как $a_{11} = 2 > 0$, в точке $\mathrm{M}_2$ функция имеет локальный минимум.

**Пример 3.** Найти точки локального экстремума функции $u = 3x^2y - x^3 - y^4$.

**Решение.** Вычисляем частые производные функции и приравниваем их нулю:

$$u_x = -3x^2 + 6xy = 0, \;\; u_y = 3x^2 - 4y^3 = 0$$

Решая эту систему, находим две точки возможного экстремума: $M_1(0{,}0)$ и $M_2(6{,}3)$.

Вычисляем частные производные второго порядка данной функции $u_{xx} = -6x + 6y, u_{yy} = = -12y^2$.

В точке $M_1$:

$$a_{11} = 0, a_{12} = 0, a_{22} = 0,$$

и, значит, $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

Поэтому точка $M_1(0{,}0)$ требует дополнительного исследования.

Значение функции $u(x, y)$ в этой точке равно нулю: $u(0{,}0) = 0$.

Далее, при $x < 0, y = 0$ имеем $u(x, y) = -x^3 > 0$, а при $x = 0, y \neq 0$ имеем $u(x, y) = -y^4 < 0$.

Следовательно, в любой окрестности точки и меньше $M_1(0{,}0)$ функция $u(x, y)$ принимает значения, как большие $u(0{,}0)$так и меньше $u(0{,}0)$, и, значит, в точке $M_1$ функция $u(x, y)$ не имеет локального экстремума.

В точке $M_2$:

$$a_{11} = -18, a_{12} = 36, a_{22} = -108,$$

и, значит, $D = 648 > 0$. Так как $a_{11} < 0$, то в точке $M_2$ функция имеет локальный максимум.

Для закрепления темы предлагаем следующие задачи и упражнения для самостоятельной работы.

**Задачи и упражнения для самостоятельной работы**

1. Найдите точки локального экстремума следующих функции двух переменных:

а) $u = x^2 - xy + y^2$; б) $u = x^2 - xy - y^2$;

в) $u = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$; г) $u = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$;

д) $u = x^y - 2y^3 - 3x + 6y)$; е) $u = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$;

ж) $u = xy + \frac{1}{2(x+y)}$; з) $u = e^{x+2y}(\mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2)$;

и) $u = e^{x-y}(x^2 - 2xy + 2y^2)$; к) $u = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;

л) $u = (x - 2y)e^{-(x^2+y^2)}$; м) $u = xyln(x^2 + y^2)$; н) $u = \frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y$.

2. Найдите точки локального экстремума следующих функции трех переменных;

а) $u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$;

б) $u = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x$;

в) $u = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$;

*г)* $u = xyz(1 - x - y - z)$; *д)* $\mathrm{u} = 2\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{y}} + \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{z}} - 4\mathrm{x} + 2\mathrm{z}^2$.

е) $u = (x + y + 2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

3. Докажите, что функция $u = (x - y^2)(2x - y^2)$:

а) имеет в точек O (0,0) локальные минимум вдоль каждой прямой, проходящей через эту точку ;

б) не имеет локального минимум в точке О (0,0).

Также, для углубленного изучения рекомендуем следующие вопросы и задания.

**Контрольные вопросы и задания**

1. Дайте определение локального экстремума функции.

2. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом условии экстремума и следствие этой теоремы. Приведите пример функции $u = f(x, y)$, удовлетворяющей в некоторой точке $M_0$ условиям $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 0$, но не имеющей в точке $M_0$ локального экстремума.

3. Какие точки называются точками возможного экстремума функции? Приведите пример функции $u = f(x, y)$, имеющей в некоторой точке $M_0$ локальный экстремум и такой, что $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 0$, а $\frac{\partial u}{\partial y}$ в точке $M_0$ не существует

4. Какая функция называется квадратичной формой? Что такое матрица квадратичной формы? Выпишите матрицу квадратичной формы $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_2^3$ и вычислите ее главные миноры.

5. Какая квадратичная форма называется: а) положительно определенной; б) отрицательно определенной; в) знакоопределенной; г) квазизнакоопределенной; д) знакопеременной? Приведите примеры каждого типа квадратичных форм.

6. Сформулируйте критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы. Пользуясь этим критерием, установите, является ли знакоопределенной квадратичная форма $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_3^2$.

7. Напишите выражение для второго дифференциала функции $u = f(x_1 \dots x_m)$ в точке $M_0$, если $x_1 \dots x_m -$ независимые переменные. Квадратичной формой от каких переменных является $d^2u|_{M_0} = 0$?

8. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции $u = f(x_1 \dots x_m)$. Являются ли условия этой теоремы необходимыми условиями экстремума?

9. Сформулируйте достаточные условия локального максимума, локального минимума и отсутствия экстремума функции $u = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$

10. Приведите пример функции $u = f(x, y)$, удовлетворяющей в некоторой точке $M_0$ условиям $du = 0$, $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, причем эта функция в точке $M_0$: а) имеет локальный экстремум; б) не имеет локального экстремума.

**ОБСУЖДЕНИЕ**

Известно, что теория функций многих переменных, особенно частные производные функций многих переменных, широко используется практически во всех областях математики и механики, а также инженерной строительстве. Примерами этого являются исследования по этим направлениям [1-23], где исследуются и применяются в практических задачах функции многих переменных. Кроме того, в работах [24-40] глубоко изучены экстремумы функций многих переменных и свойства их частных производных.

В заключение отметим, что в предлагаемой методике по преподавание нахождение локального экстремума функций многих переменных, основное внимание уделено представление учебных материалов с простого к сложному. Здесь, также особое внимание уделены составлению вопросов и задач (вопросы и задания почти полностью охватывали тему) для решения в практической занятие и самостоятельной работы, а также активного общения со студентами [41-42]. Предложенная в статье схема по преподавание данной темы, неоднократно оценены положительно студентами.

**ВЫВОДЫ**

В заключение отметим, что эффективно организованная учебная деятельность является важнейшим средством формирования математической культуры и таких качеств математического мышления, как гибкость, критичность, рациональность, логичность; их органическое сочетание проявляется в особых способностях человека, дающих ему возможность успешно осуществлять творческую деятельность.

**REFERENCES**

1. Деҳқонов У.Ғ., Исабоев Ш. М., Абдужабборов А.А. Шамол агрегати фойдали қаршилик моментининг зарурий қиймати //Journal of Advanced Research and Stability, “Academic Excellence on Science and Research”, Special Issue, 2022, p. 216-222.
2. Даминов, Ж. (2022). Некоторые методические советы по вычисление пределов функций многих переменных. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 12(12).
3. Daminov J.A., Tillaboev Y.., Agzamov K.S., Isaboev S.M., Abdujabborov A.A. The Mechanism of Experimental Determination of the Angular Velocity of the Working Shaft of the Wind Unit// Design Engineering, 2021, том 9. Pages:11814 – 11821.
4. Тиллабоев Е.К., Дадамирзаев М.Г., Абдулхафизов Б.Х. (2015). Об одном из методов решения уравнения Навье-Стокса // Молодой ученый. Том 86, № 6, стр 7-12.
5. Tillaboev Y., Daminov J. A., Najmiddinov I. The Effect of the Number of Rotor Plates on the Vertical Axis on the Value of the Moment of Inertia// Design Engineering, 2021, ISSUE 09. Pages:5504-5509.
6. Тиллабоев Е.К., Холмирзаев И.А. Определение базисных контуров с помощью графа в электрических системах// Теория и практика современной науки. 2016, 7(13), с. 315-318.
7. Тиллабоев Ё.К.. О возможностью mathcad при решения контурных уравнений электрической цепи// Теория и практика современной науки. 2016, № 6-2 (12), стр 219-224.
8. Dehqonov U., Tillaboev Y. Rotors Of Wind Aggregates and Their Construction Problems//International Journal of Progressive Sciences and Technologies, 2021, Vol 27, № 1. p.148-154.
9. Тиллабоев Е.К., Хакимов Р.М., Холмирзаев И.А. (2015). Организация приближённого решения уравнений состояния электрической цепи в MathCAD// Молодой ученый. Том 89, № 9, стр 44-48.
10. Tillaboev Y.K. Domino Interactive In Theoretical Mechanics Lectures Apply The Method// Innovative Technologica: Methodical Research Journal. 2021, Vol 2, № 07, p.43-48.
11. Dekhkonov Ulugbek, Tillaboev Yodgor,Orishov Utkirbek. Determining the Optimal Angular Velocity of a Vertical Axis Rotor Wind Unit. Jundishapur Journal of Microbiology 15 (No.1), 3298-3302.
12. Mahmudov Z.S., Isaboev Sh.M., Abdujabborov A.A., Rakhmatillaev Y.N. Use of Modern Methods of Assessing Students' Knowledge // Undishapur Journal of Microbiology, 15:1 (2022), p. 3280-3286.

13. Абдужобборов, А. (2022). Ortogonal funksiyalar va qo'pxadlar mavzusini o'qitishga doir metodik tavsiyalar: Ortogonal funksiyalar va qo'pxadlar mavzusini o'qitishga doir metodik tavsiyalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 12(12).
14. Тиллабоев Е.К. Последовательности точек в m-мерном Евклидовом пространстве // Science and Education, scientific journal, 3:2 (2022), с.28-37.
15. Тиллабоев Е.К. О преподовании непрерывности функции многих переменных с помощью интерактивных методов // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), с.1053-1062.
16. Z. Mahmudov Z. S., Daminov J. A., Rahimov A. M. The Use Of Cluster Method In Lectures On Theoretical Mechanics // International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT). 2018, Vol. 27, p.145-147.
17. Yuldashev S. S., Boytemirov M. Influence of the level of the location of the railway canvas on the propagation of waves from train motion //ISJ Theoretical & Applied Science. – 2020. – №. 05 (85). – С. 140.
18. Юлдашев Ш. С. и др. Влияние высоты расположения железнодорожного полотна на уровень колебания грунта, возникающего при движении поездов //Научное знание современности. – 2018. – №. 10. – С. 55-57.
19. Юлдашев Ш. С., Карабаева М. У. Прогнозирование уровня вибрации в грунтах, распространяющейся от тоннелей метрополитена круглого сечения //Молодой ученый. – 2016. – №. 6. – С. 249-253.
20. Gafurovich D. U., Sotivoldievich Z. M. The use of non-conventional power sources is a requirement of the period //Academicia Globe: Inderscience Research. – 2021. – Т. 2. – №. 07. – С. 121-126.
21. Ulugbek D., Yodgorjon T. Rotors Of Wind Aggregates and Their Construction Problems // International Journal of Progressive Sciences and Technologies. – 2021, V. 27. №1. p. 148-154.
22. Abdivalievich D. J. Increasing student activity in lectures on the subject of structural mechanics // Innovative Technologica: Methodical Research Journal. 2021, v. 2. № 07. p. 38-42.
23. Mirsaidov M., Boytemirov M., Yuldashev F. Estimation of the Vibration Waves Level at Different Distances //Proceedings of FORM 2021. – Springer, Cham, 2022. – С. 207-215.
24. Rasulov, R. X. R. (2022). Ikkita buzilish chizig'iga ega elliptik tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimi haqida. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
25. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
26. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
27. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
28. Rasulov, R. X. R. (2022). Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

29. Rasulov, R. X. R. (2022). Квазичизиқли гиперболик турдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
30. Raupova, M. (2022). Ikkita buzilish chizig‘iga ega giperbolik tipdagi kvazichiziqli tenglama uchun Koshi masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
31. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
32. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
33. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
34. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
35. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
36. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo‘yicha ba’zi uslubiy ko‘rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
37. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
38. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta’limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5)
39. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
40. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
41. Расулов Х.Р., Рашидов А.Ш. Организация практического занятия на основе инновационных технологий на уроках математики // Наука, техника и образование, 72:8 (2020) с.29-32.
42. Расулов Т.Ҳ., Расулов Х.Р. (2021). Ўзгариши чегараланган функциялар бўлимини ўқитишга доир методик тавсиялар. Scientific progress. 2:1, 559-567 бетлар.