ОБ ОДНОЙ ТЕМЕ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КРУЖКОВ - ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ (КОНТРПРИМЕРЫ)

Рахимов Абдулворис Муталович
Наманганский инженерно-строительный институт
Тиллабоев Едгоржон Кенжабоевич
Наманганский инженерно-строительный институт

https://doi.org/10.5281/zenodo.7066736

Аннотация. *В статье приведены краткий обзор происхождения производной, также рассматриваются вопросы, с которыми студенты сталкиваются на лекциях по математическому анализу в вузах. Составлен и систематизирован список вопросов, которым преподаватель должен уделить особое внимание в математических кружках. В частности, приведены примеры функций (из материалов интернета), которые непрерывны в промежутке, но не имеющие производной. Подробно анализированы функции, построенные ведущими математиками Больцано Б., Вейерштрасс К. и Ван дер Варден. Более подробно проанализирована функция Ван дер Вардена. Основная цель написания статьи – систематизировать имеющуюся информацию о непрерывных, но недифференцируемых функциях и дать рекомендации по их объяснению в кружках.*

Ключевые слова: *математический анализ, производная, промежуток, непрерывность, периодичность, ломаная, последовательность.*

ABOUT ONE TOPIC FOR MATHEMATICAL CIRCLES - DERIVATIVE FUNCTION (COUNTEREXAMPLES)

Abstract. *The article provides a brief overview of the origin of the derivative, also discusses the issues that students face in lectures on mathematical analysis in universities. A list of questions has been compiled and systematized that the teacher should pay special attention to in mathematical circles. In particular, examples are given of several functions (from the Internet) that are continuous in the interval but do not have a derivative. The functions constructed by the leading mathematicians Bolzano B., Weierstrass K. and Van der Waerden are analyzed in detail. The Van der Waerden function is analyzed in more detail. The main purpose of writing the article is to systematize the available information about continuous but non-differentiable functions and give recommendations for their explanation in circles.*

Keywords: *mathematical analysis, derivative, interval, continuity, periodicity, broken line, sequence.*

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в средних школах (в 11 классе) в курсе математике изучаются тема «Производная функция», которая является одной из фундаментальных тем высшей математики (математического анализа). Так, как при помощи производной проводится исследование функций, которые в свою очередь описывают реальные процессы (математические, физические, биологические, химические, экономические и т.д.) происходящие в природе.

При изучении учащиеся средних школ и студенты вузов часто встречаются с трудностями при решении задач по данной теме. Отметим, производная функции является основ исследования производной функции в высших учебных заведениях, и создание практических и факультативных занятий, оказывающих укреплению и развитию познаний по теме «Производная функции».

Прежде чем рассказать историю происхождения производной функции, перечислим вопросы, которые к нему привели. В частности, простые физические явления, прямолинейное движение материальной точки и задача о протекании тока в цепи приводят к вычислению производной. Для изучения этого вводятся соответствующие характеристики: понятия скорости движения и силы тока. Одной из таких задач является задача о прямолинейном движении (с мгновенной скоростью) материальной точки. Обычно поезда, автомобили, пароходы, самолеты, ракеты и космические корабли двигаются плавно только на некоторых участках дороги, и вообще двигаются неравномерно. В результате учащиеся и студенты получают начальное представление о теме.

Тот факт, что точка в неравномерном движении проходит разные пути за разные, но равные промежутки времени, приводит к понятию средней скорости за период времени, характеризующей неравномерное движение точки. Еще одним важным вопросом, связанным с понятием производной, является вопрос о протекании тока в электрической цепи, то есть о мгновенной величине тока.

Практический опыт показывает, что трудно обучить студентов предоставлять формулировку производной функции, которые определять её и вычислить производную функцию в точке. Обычно, студенты без затруднений решают задачи и по приложение производной к исследованию данной функции. Приступая к изучению задачи, необходимо найти подход внедрения производной, обучать в доступном языке для представления всеми обучающими учебный материал. Если студенты вузов умеют применять определение производной с целью её вычисления, всесторонне объяснять физический и геометрический смыслы и затем продемонстрировать её в различных применениях, к примеру, в биологию, физике, экономике или химии.

Отметим, что слово «производная» является дословным переводом на русский язык от французского языка слова «derivee». Этот термин в 1797 году ввел в математику ведущий ученый Лагранж Ж. Автором обозначения производной русский термин «производная функции» впервые употребил русский ученый Висковатов В.И.

Производная является одной из основных понятий математики, т.е. математического анализа. Производная происходила в связи с необходимостью решения различных задач из математики и кинематики, биологии, физики, механики, но прежде всего для построения касательной к кривой графика функции, которая описывает зависимость пройденного расстояния от времени, а также для определения скорости прямолинейного движения материальной точки.

В математическом анализе производная отражает числовое представление степени изменений величины, которая находится в одной точке под воздействием разных условий. Наметим, что формула производной было известно ещё с пятнадцатого века. Великий итальянский ученый Тартальи применял производную в своих исследованиях, развивая и рассматривая вопрос о зависимости траектории полета снаряда от наклона орудия.

В 1537 года в своем произведении «Новая наука» впервые доказал, что траектория полета снаряда на всем протяжении есть кривая второго порядка (парабола). Так, как до Тартальи учили, что траектория снаряда состоит из двух прямых, соединенных кривой линией. Итальянский ученый Тарталья доказывает, что наибольшая дальность полета снаряда соответствует углов 45°. Более подробный материал по алгебре, арифметики и геометрии содержится в его работе «Общий трактат о числе и мере». Кроме того, Тарталья указал способа решения кубических уравнений.

Необходимо отметить, что формула производной часто использовали великие ученые, как Исаак Ньютон.

Далее интенсивно развивалась концепция производной, основанная на учении Галилея Г. о движении планет, связанный с введением им понятия ускорения и обобщения понятия ускорения его для случая криволинейного движения Христианом Г. Первый Христиан Г. применил разложение ускорения на нормальную и касательную составляющие. В свою очередь Галилей Г. посвящал свое целое произведение о роле производной в математике.

За этим производная и различные её изложения с применением стали встречаться в многих работах известных русских и зарубежных математиков таких, как Рене Декарт, Роберваль и Грегори. Фундаментальный вклад по исследованию производной функции внесли великие ученые Лопиталь, Эйлер, Бернулли и Гаусс.

В то время среди ученых остро встали вопросы о вычислении и определении скорости движения, а также нахождении ускорения. Решение этих вопросов привело к определению связи между задачей вычисление скорости движущегося материальной точки и задачей о проведении касательной к графику функции (здесь, функция описывала зависимость расстояния от времени).

Методы построения касательных к широкому классу кривых Декарта Р. и Ферма П., как и методы древнегреческих геометров, строивших касательные к параболам, гиперболам, окружностям, эллипсам и ещё некоторым кривым (кривые второго порядка), требовали различных подходов в каждом конкретном рассматриваемом случае. Единый подход к решению задачи об определении касательной было открыто в конце семнадцатого века одновременно и независимо друг от друга английским ученым, механиком и математиком Ньютоном Исаака и немецким математиком и философом Лейбницем Г.

Как было отмечено в выше, что русский термин «производная функции» впервые употребил русский математик В.И. Висковатов (1780 г. – 1812 г.). Обозначение приращения (аргумента и функции) греческой буквой Δ (дельта) впервые употребил швейцарский математик и механик Бернулли Иоганн (1667 г. – 1748 г.). Символ дифференциала, производной dx принадлежит немецкому математику Лейбницу Готфриду Вильгельму (1646 г.- 1716 г.). Обозначение производной по времени точкой над буквой - $\dot{x}$ – произвол английский математик, механик и физик Исаак Ньютон (1642 г. – 1727 г.). Краткое обозначение производной штрихом - $f'(x)$ - принадлежит французскому математику, астроному и механику Лагранжу Жозефу Луи (1736 г. - 1813 г.), которое он ввел в 1797 году. Символ частной производной $\frac{\partial}{\partial x}$ активно применял в своих работах немецкий математик Карл Гаусс. Якоби (1805 г. - 1851 г.), а затем выдающийся немецкий математик *Вейерштрасс* Карл Теодор Вильгельм (1815 г. - 1897 г.), хотя это обозначение уже встречалось ранее в одной из работ французского математика Адриена Мари Лежандра (1752 г. - 1833 г.). Символ дифференциального оператора ∇ придумал выдающийся ирландский математик, механик и физик Уильям Роуэн Гамильтон (1805 г. - 1865 г.) в 1853 году, а название «набла» предложил английский ученый-самоучка, инженер, математик и физик Оливер Хевисайд (1850 г. - 1925 г.) в 1892 году (https://urok.1sept.ru/articles/692233).

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В высшей математике, в частности в математическом анализе в целом рассматриваются функции, непрерывные, имеющие производные, даже до некоторого порядка включительно. В некоторых отдельных точках производные (дифференциалы) функции могут не существовать или терпеть разрывы. В качестве примера будем рассмотреть следующую функцию $f(x) = |x|$.

Докажем, что производная от данной функции $f'(0)$ при $x = 0$ не определена. Так, по определению производной имеем:

$$f'(0) = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x| + |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Если в пределе Δx стремится к нулю, и при этом оставаясь положительным, то $|\Delta x| = \Delta x$ и тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$. Если же Δx стремится к нулю и при этом оставаясь отрицательным, то $|\Delta x| = -\Delta x$ и тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$ (см. рис. 1).

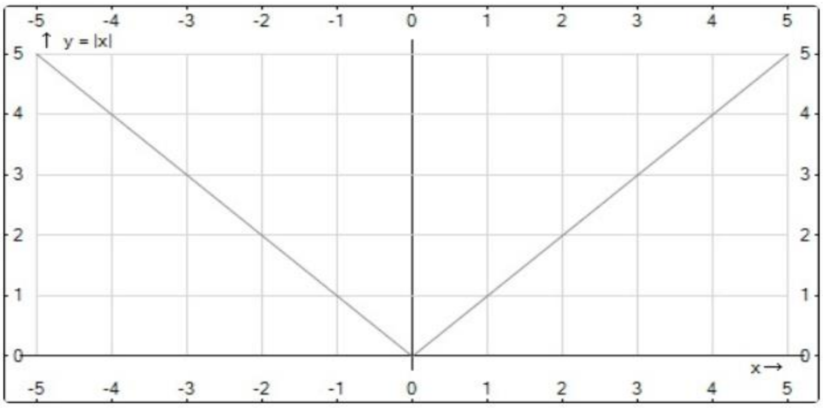

Рис.1

Если предел функции в (1) существовал бы, то не зависел бы от того, как приращение аргумента - Δx стремится к нулю. Здесь, это не так. Но отсюда можно сделать следующий вывод, что предел в формуле (1) не существует. Отсюда следует, что функция $f(x) = |x|$ имеет непрерывную производную в $(-\infty, +\infty)$, кроме точки $x = 0$.

Рассмотрим другой пример (пример Вейерштрасса):

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0, \\ 0, x = 0, \end{cases}$$

которая, всюду непрерывна, но не имеет производной в точке $x = 0$ (https://otvet.mail.ru/question/67441746).

При $x \neq 0$ функция непрерывная, а при $x \to 0$ существует предел и равен 0. Функция является произведением бесконечно малой x и ограниченной $x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)$ функций. Отсутствие в точке нуле производной рассматриваемой функции доказывается по определению:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

который не существует предела (см. рис. 2).

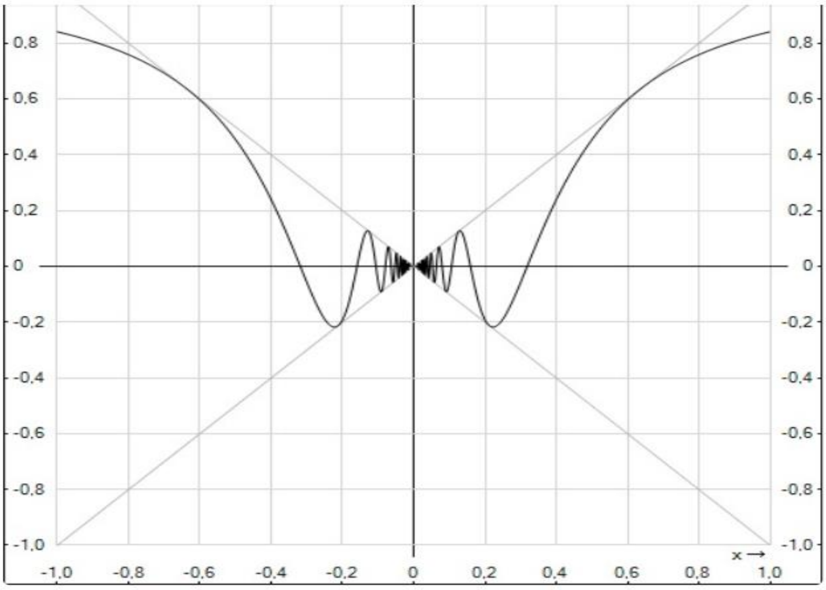

Рис. 2

Но до начала нынешнего столетия лишь изредка задавались вопросом, всегда ли обладают производными функции того или иного класса, например непрерывные или монотонные и каковы множества тех точек, в которых эти производные могут не существовать. В этом направлении были получены лишь некоторые почти очевидные результаты, как, например, существование левой и правой производных у выпуклой функции, откуда следовала дифференцируемость такой функции при всех x кроме, может быть, счетного множества значений.

Также, отметим, что при чтении лекции по математическому анализу обычно у студентов возникают различные вопросы следующего типа: существует ли: а) разрывная во всех точках функция, модуль которой – непрерывная функция; б) функция, непрерывная лишь в точке $x = 0$ и разрывная во всех других точках; в) функция, среди значений которой на любом (сколь угодно малом) интервале есть сколь угодно большие значения; г) непостоянная периодическая функция, среди положительных периодов которой нет наименьшего; д) функция, непрерывная в иррациональных и разрывная в рациональных точках; е) не монотонное ни на каком интервале взаимно однозначное соответствие между двумя отрезками; ж) непрерывная на промежутке, но не имеющая конечные производные на этом промежутке.

Если обратим внимание на вопросы а)-е), на них можно легко ответить. А на вопрос: существует ли непрерывная функция на промежутке, но не имеющая конечные производные на этом же промежутке, ответить более-менее трудно. В связи с этим, в этой статье постараемся ответить на этот вопрос так, чтобы студенты смогли понять.

Первые примеры непрерывной на всей числовой оси функций, во всех точках, не имеющих конечных производных, были указаны Больцано Б. и Вейерштрассом К. Например, функция Вейерштрасса задается рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\cos\,(b^n \pi x)\,,$$

где $0 < a < 1, b -$ нечетное натуральное число, меньше единицы.

Этот рассматриваемый функциональный ряд мажорируется сходящимся следующим числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b^n\,,$$

поэтому функция Вейерштрасса $f(x)$ определена и непрерывна при всех действительных числах x. Но, функция Вейерштрасса не имеет производной, по крайней мере когда $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

График функции Вейерштрасса изображена с следующими параметрами, когда $a = 3$, $b = 1/2$ на интервале $[-2,\, 2]$. График имеет специальных характер, демонстрирует самоподобие, т.е. указанная в красном круге область подобна всему графику (рис. 2).

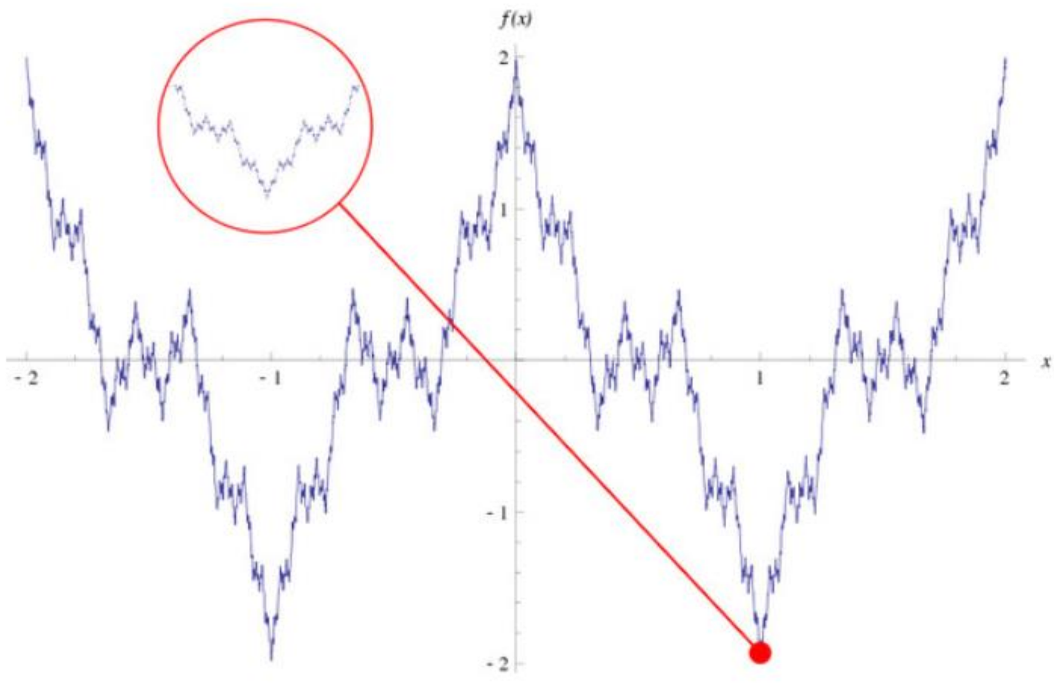

Рис. 2

Ещё раз повторим, что график функции Вейерштрасса имеет специальный (фрактальный) характер (https://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/3353/недифференцируемая).

Заметим здесь, что ещё простой пример, в котором периодические функции типа $\cos\,(\omega x)$ заменены периодическими ломаными (dic.academic.ru/dic.nsf/encmathematics/3353), был построен ван дер Варденом.

Сразу можно сказать, что рассматриваемый этот ряд мажорируется сходящейся прогрессией, т.е. следующим числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^n,$$

которая сходится равномерно (признаки равномерной сходимости рядов), и его сумма является непрерывной функцией от x в изучаемой области. После сложных вычислений Вейерштрассу удалось доказать, что у функции ни в одной точке для нее не существует конечной производной.

Пусть $u_0(x) -$ функция, равная для каждого вещественного числа x абсолютной величине разности между числом x и ближайшим к нему целым числом. Значить, эта рассматриваемая функция линейна на каждом замкнутом интервале вида $\left[\frac{n}{2}, \frac{(n+1)}{2}\right]$, здесь $n -$ целое число; функция непрерывна - и имеет период, равный числе единице. График функции представляет собой ломаную и изображен на рисунке 3(а). Отдельные звенья этой ломаной имеют угловой коэффициент равной ±1.

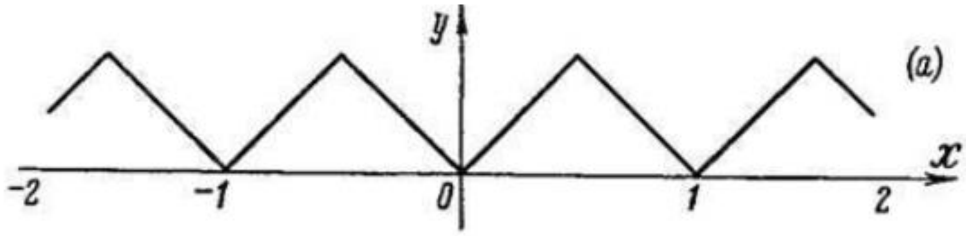

Рис. 3(а)

Положим, для к=1,2,3,… (https://www.bestreferat.ru/referat-387002.html):

$$u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k}.$$

Эта функция линейная в промежутках вида $\left[\frac{s}{2\cdot 4^k}, \frac{s+1}{2\cdot 4^k}\right]$. Также непрерывная и имеет период равной $\frac{1}{4^k}$. График её также будет ломаная, но с маленькими зубчиками (см. рис.3(б)), Изображен график функции $u_1(x)$. Во всех случаях угловые коэффициенты отдельных звеньев ломаной и здесь которые равны ±1.

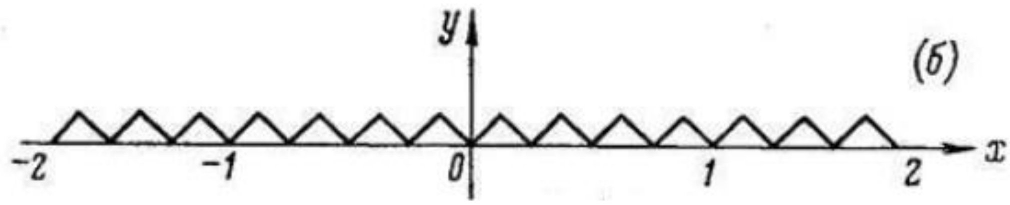

Рис. 3(б)

Пусть функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Рассматриваемая функция непрерывна на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$ и ни в одной точке не имеет конечной производной (https://www.bestreferat.ru/referat-387002.html).

Так, первые три частные суммы полученного ряда изображены на рисунке 4 (см. рис 4).

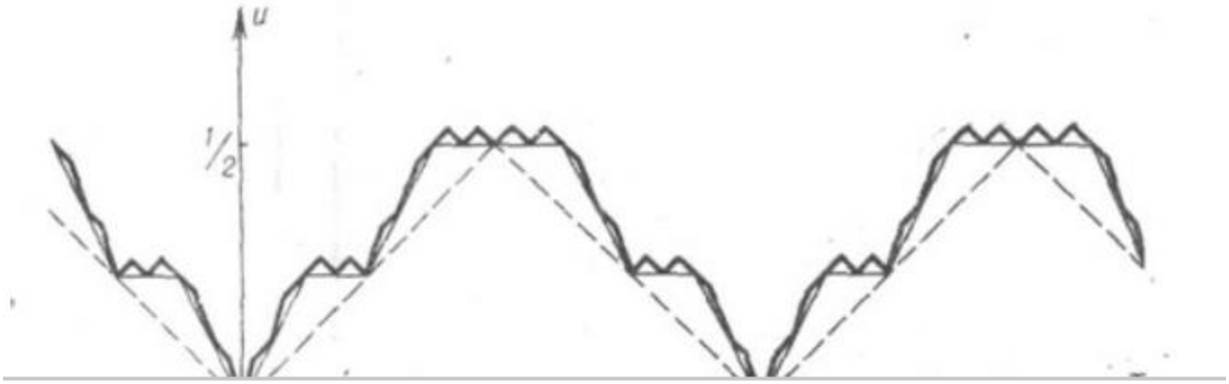

Рис. 4

РЕЗУЛЬТАТЫ

В 1806 году Ампер (Ampère, A. M. // Ecole Politechnique, 6 (1806), fasc. 13.) предпринял попытку доказать путем аналитически, что всякая «произвольная» функция дифференцируема всюду, за исключением «исключительных и изолированных» значений аргумента. При этом принималась за очевидное возможность разбиения интервала изменения аргумента на части, в которых функция была бы монотонна. С этими гипотезу Ампера можно рассматривать как нестрогую формулировку теоремы Лебега (Рисс. Ф., С.-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, Москва, Мир, 1979. с. 13, на английском языке). В первой половине 19-века были попытки доказать гипотезу Ампера для более широкого класса функций, именно для всех непрерывных функций. Риман в 1861 году привёл своими учениками в качестве контрпримера следующую функцию:

$$r(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2},$$

однако, изучение дифференцируемости данной функции чрезмерно трудно.

Выдающихся ученый Джозеф Гервер (англ. Joseph Gerver) в 1970 году доказал, что рассматриваемая функция имеет производную только в некоторых рациональных точках (Gerver J. // American Journal of Mathematics, vol. 92, No. 1 (Jan., 1970), p. 33-55. Архивная копия от 24 марта 2016 на Wayback Machine).

Далее, приведем пример по видимому, наиболее элементарный, принадлежащий также ван дер Вардену. Идея его основана на том, что последовательность, состоящая из целых чисел, сходится только тогда, когда все ее члены, начиная с некоторого, совпадают.

Будем говорить, как обычно, что функция $f(x)$ имеет в точке x производную, равную $f'(x)$, если отношение

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

стремится к определенному конечному пределу $f'(x)$, когда $h \to 0$ и $x + h$ пробегает значения, при которых $f(x+h)$ определена. Обозначив $\{x\}$ расстояние от x до ближайшего целого числа, рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}. \tag{2}$$

Члены этого ряда положительны, непрерывны и не превосходят от 10^n, поэтому функция $f(x)$ непрерывна. Попытаемся теперь вычислить производную функции $f(x)$ в какой-нибудь точке x.

Для этого заметим, что можно ограничиться рассмотрением интервала $0 \leq x < 1$, и запишем x в виде

$$x = 0, a_1, a_2 \dots a_n \dots,$$

причем в случае конечной десятичной дроби условимся дополнять ее нулями. Дробь

$$0, a_{n+1}, a_{n+2} \dots,$$

может быть $\leq \frac{1}{2}$ или $> \frac{1}{2}$.

В первом случае

$$\{10^n x\} = 0, a_{n+1}, a_{n+2} \dots,$$

во втором –

$$\{10^n x\} = 1 - 0, a_{n+1}, a_{n+2} \dots .$$

Положив $h_m = 10^{-m}$ тогда, когда a_m равно 4 или 9, и $h_m = 10^{-m}$ при любом другом a_m, рассмотрим отношение

$$\frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m}, \qquad (3)$$

согласно (2), его можно записать в виде

$$10^m \sum_{n=0}^{\infty} \pm \frac{\{10^n (x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}}{h_m}.$$

Числители написанных дробей обращаются в нуль при $n \geq m$ и приводятся к $\pm 10^{n-m}$ при $n \leq m$. Следовательно, выражение (3) принимает целые значения, положительные, отрицательные или равные нулю, но во всяком случае той же четности, что $m - 1$. Таким образом, последовательность отношений (3), состоящая из целых чисел, поочередно четных и нечетных, не может сходиться. Значит функция (2) непрерывная функция, не имеющая производной.

ОБСУЖДЕНИЕ

Практический опыт показывает, что организация кружков по дополнительным темам по математике положительно влияет на приобретение углубленное знание студентами. В этой связи рекомендуется дать больше информации о производной, которая является одной из основных понятий предмета математического анализа. Это поможет студентам успешно проводить научные исследования. В частности, несколько студентов, участники кружков, опубликовали научные статьи совместно с научными руководителями [1-8], который является хорошим результатом для преподавателей.

ВЫВОДЫ

Следует отметить, что студентам объяснен ряд примеров о функциях, которые являются непрерывными функциями, но не имеющие производной. Они выразили мнение, что приведенный в статье пример ван дер Вардена был более понятен. В будущем следует расширить количество кружков по различным актуальным вопросам, а также рекомендовать им изучить научные статьи, где широко используются производной функции различных классов[9-29].

Полезно также рекомендовать учащимся прочитать статьи [30-46] по теме кружка. При этом не требуется от студентов глубокого понимания научных статей.

REFERENCES

1. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
2. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
3. Шукурова М.Ф., Раупова М.Х. Каср тартибли интегралларни ҳисоблашга доир методик тавсиялар // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), 65-76 b.
4. Бозорова Д.Ш., Раупова М.Х. О функции Грина вырождающегося уравнения эллиптического типа // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), с.14-22.
5. Жамолов Б.Ж., Раупова М.Х. О функции Римана вырождающегося уравнения гиперболического типа // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), с.23-30.
6. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig'iga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo'yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
7. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
8. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
9. Даминов, Ж. (2022). Некоторые методические советы по вычисление пределов функций многих переменных. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 12(12).
10. Тиллабоев Е.К., Дадамирзаев М.Г., Абдулхафизов Б.Х. (2015). Об одном из методов решения уравнения Навье-Стокса // Молодой ученый. Том 86, № 6, стр 7-12.
11. Тиллабоев Е.К., Холмирзаев И.А. Определение базисных контуров с помощью графа в электрических системах// Теория и практика современной науки. 2016, 7(13), с. 315-318.
12. Тиллабоев Ё.К.. О возможностью mathcad при решения контурных уравнений электрической цепи// Теория и практика современной науки. 2016, 6-2 (12), с. 219-224.
13. Dehqonov U., Tillaboev Y. Rotors Of Wind Aggregates and Their Construction Problems // International Journal of Progressive Sciences and Technologies, 27:1 (2021), p.148-154.
14. Тиллабоев Е.К., Хакимов Р.М., Холмирзаев И.А. (2015). Организация приближённого решения уравнений состояния электрической цепи в MathCAD// Молодой ученый. Том 89, № 9, стр 44-48.
15. Tillaboev Y.K. Domino Interactive In Theoretical Mechanics Lectures Apply The Method // Innovative Technologica: Methodical Research Journal. 2021, Vol 2, № 07, p.43-48.
16. Dekhkonov Ulugbek, Tillaboev Yodgor,Orishov Utkirbek. Determining the Optimal Angular Velocity of a Vertical Axis Rotor Wind Unit. Jundishapur Journal of Microbiology 15 (No.1), 3298-3302.

17. Mahmudov Z.S., Isaboev Sh.M., Abdujabborov A.A., Rakhmatillaev Y.N. Use of Modern Methods of Assessing Students' Knowledge // Undishapur Journal of Microbiology, 15:1 (2022), p. 3280-3286.
18. Тиллабоев Е.К. О преподовании непрерывности функции многих переменных с помощью интерактивных методов // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), с.1053-1062.
19. Ulugbek D., Yodgorjon T. Rotors Of Wind Aggregates and Their Construction Problems // International Journal of Progressive Sciences and Technologies. – 2021, V. 27. №1. p. 148-154.
20. Abdivalievich D. J. Increasing student activity in lectures on the subject of structural mechanics // Innovative Technologica: Methodical Research Journal. 2021, v. 2. № 07. p. 38-42.
21. Mirsaidov M., Boytemirov M., Yuldashev F. Estimation of the Vibration Waves Level at Different Distances //Proceedings of FORM 2021. – Springer, Cham, 2022. – С. 207-215.
22. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
23. Musayeva, S. (2022). DESCRIPTION OF MODERN MARKETING RESEARCH METHODS IN THE MARKET ECONOMY. Science and innovation, 1(A5), 33-38.
24. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
25. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
26. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
27. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
28. Деҳқонов У.Ғ., Исабоев Ш. М., Абдужабборов А.А. Шамол агрегати фойдали қаршилик моментининг зарурий қиймати //Journal of Advanced Research and Stability, «Academic Excellence on Science and Research», Special Issue, 2022, p. 216-222.
29. Daminov J.A., Tillaboev Y.., Agzamov K.S., Isaboev S.M., Abdujabborov A.A. The Mechanism of Experimental Determination of the Angular Velocity of the Working Shaft of the Wind Unit// Design Engineering, 2021, том 9. p. 11814 – 11821.
30. Tillaboev Y., Daminov J. A., Najmiddinov I. The Effect of the Number of Rotor Plates on the Vertical Axis on the Value of the Moment of Inertia// Design Engineering, 2021, ISSUE 09, p. 5504-5509.
31. Абдужобборов, А. (2022). Ortogonal funksiyalar va qo’pxadlar mavzusini o’qitishga doir metodik tavsiyalar: Ortogonal funksiyalar va qo’pxadlar mavzusini o’qitishga doir metodik tavsiyalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 12(12).
32. Тиллабоев Е.К. Последовательности точек в m-мерном Евклидовом пространстве // Science and Education, scientific journal, 3:2 (2022), с.28-37.

33. Z. Mahmudov Z. S., Daminov J. A., Rahimov A. M. The Use Of Cluster Method In Lectures On Theoretical Mechanics // International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT). 2018, Vol. 27, p.145-147.
34. Yuldashev S. S., Boytemirov M. Influence of the level of the location of the railway canvas on the propagation of waves from train motion //ISJ Theoretical & Applied Science. – 2020. – №. 05 (85). – С. 140.
35. Azimovna M. S., Shokhrukhovich U. F., Sodirovich U. B. ANALYSIS OF THE MARKET OF TOURIST PRODUCTS OF THE SAMARKAND REGION //BARQARORLIK VA YETAKCHI TADQIQOTLAR ONLAYN ILMIY JURNALI. – 2022. – Т. 2. – №. 4. – С. 422-427.
36. Юлдашев Ш. С. и др. Влияние высоты расположения железнодорожного полотна на уровень колебания грунта, возникающего при движении поездов //Научное знание современности. – 2018. – №. 10. – С. 55-57.
37. Юлдашев Ш. С., Карабаева М. У. Прогнозирование уровня вибрации в грунтах, распространяющейся от тоннелей метрополитена круглого сечения //Молодой ученый. – 2016. – №. 6. – С. 249-253.
38. Gafurovich D. U., Sotivoldievich Z. M. The use of non-conventional power sources is a requirement of the period //Academicia Globe: Inderscience Research. – 2021. – Т. 2. – №. 07. – С. 121-126.
39. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
40. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
41. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
42. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
43. Расулов Х.Р., Джуракулова Ф.М. Об одной динамической системе с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с. 19-22.
44. Х.Р Расулов, Ф.М. Джуракулова (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress. 2:1, 455-462 бетлар.
45. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.
46. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
47. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги квазичизиқли тенглама учун Нейман масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
48. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).