# BIR VA IKKI O‘LCHAMLI SIMPLEKSLARDA BERILGAN KVADRATIK OPERATORLAR SINFINI TASNIFI HAQIDA

**Muxitdinov Ramazon To‘xtaevich**
Toshkent kimyo-texnologiya instituti Oliy matematika kafedrasi dotsenti
**Tulaeva Madina Nutfulloevna**
Buxoro davlat universiteti Fizika-matematika fakulteti magistranti

https://doi.org/10.5281/zenodo.7064156

***Annotatsiya.*** *Maqolada bir va ikki o‘lchamli simplekslar haqida umumiy ma'lumotlar va ularning xossalari bayon qilingan. Bundan tashqari, shu simplekslarda aniqlangan kvadratik operatorlarning tasniflari berilgan. Kvadratik operatorlarning syurektiv va ikki tomonlama bo‘lishi uchun zaruriy va yetarli shartlar hamda gomeomorfizm bo‘lish shartlari keltirilgan va teoremalar sifatida berilib, isbotlangan.*

***Kalit so‘zlar:*** *simpleks, bir va ikki o‘lchamli simplekslar, nuqta, kesma, uchburchak, tetraedr, vektor, affin qobig‘i, suryektiv, kvadratik operator, biologiyaning matematik modellari, funksiya, tenglama, muntazam ko‘pburchak, simmetriya markazi.*

# О КЛАССИФИКАЦИИ КВАДРАТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ЗАДАННЫХ В ОДНО- И ДВУМЕРНЫХ СИМПЛЕКСАХ

***Аннотация.*** *В статье приведены общие сведения об одно- и двумерных симплексах и их свойствах. Кроме того, изложены классификации квадратичных операторов, определенных в этих симплексах. Приводятся и доказываются в виде теорем необходимые и достаточные условия сюръективности и двойственности, а также условия гомеоморфизма квадратичных операторов.*

***Ключевые слова:*** *симплекс, одномерные и двумерные симплексы, точка, отрезок, треугольник, тетраэдр, вектор, аффинная оболочка, сюръективный, квадратичный оператор, математические модели биологии, функция, уравнение, правильный многоугольник, центр симметрии.*

# ON THE CLASSIFICATION OF THE CLASS OF QUADRATIC OPERATORS GIVEN IN ONE AND TWO DIMENSIONAL SIMPLEXES

***Abstract.*** *The article describes general information about one- and two-dimensional simplexes and their properties. In addition, classifications of quadratic operators defined in these simplexes, necessary and sufficient conditions for being surjective and dual, and conditions for being a homeomorphism are given and proved as theorems.*

***Keywords:*** *simplex, one- and two-dimensional simplexes, point, section, triangle, tetrahedron, vector, affine shell, surjective, quadratic operator, mathematical models of biology, function, equation, equilateral triangle, center of symmetry.*

## KIRISH

G.Mendelning matematikaga juda yaqin tilda tuzilgan asosiy qonunlari matematiklarning diqqatini biologiya va xususan populyatsiya genetikasi bilan bog'liq muammolarni o‘rganishga qaratdi (Z.Volterra, S.N.Bernshteyn, A.N.Kolmogorov, V Feller). Populyatsiya genetikasidagi algebraik va ehtimollik yo‘nalishlariga ko‘plab adabiyotlar bag'ishlangan.

Matematik genetikaning ba'zi modellarida tabiiy ravishda dinamik (sistematik) sistemalar vujudga keladi, ular standart

$$S^{n-1} = \{ x = (x_1, x_2,\dots,x_n): x_i \geq 0,\ i=1,2,\dots\dots,n;\ \ \sum_{i=1}^{n} x = 1\}$$

(n-1) - o‘lchovli simpleksning o‘ziga xos kvadratik operatorlari bilan aniqlanadi, ular quyidagi shaklga ega:

$$V: X_k^{`} = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k}\, x_i x_j$$

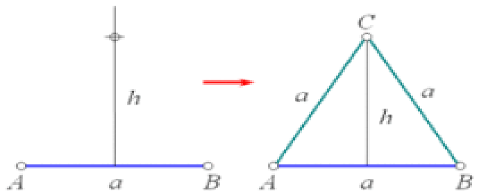
$$P_{ij,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1\ P_{ij,k}=P_{\mu,k} \text{ barcha i,j,k lar uchun.}$$

Shu munosabat bilan biologiyada paydo bo‘ladigan merosning turli modellarini batafsil o‘rganish dolzarb ko‘rinadi. To‘plamning o‘ziga aylanishi suryektiv bo‘lgan holatning tavsifi, ushbu sinf muammolariga murojaat qilgan holda, biologik modellarni o‘rganishda ham muhimdir. Shunday qilib, kvadratik operatorning suryektivligi, kvadratik operatorning har qanday trayektoriyasi simpleksning oldindan belgilab qo‘yilgan har qanday nuqtasidan yoki modellar tilidan o‘tishini kafolatlaydi, ma'lum bir qator bosqichlardan so‘ng biz navlarning to‘plamlariga dastlabki taqsimot tanlanadi. Amaliy masalalarda kvadratik operatorlar va suryektiv kvadratik operatorlar to‘plamining chekka nuqtalarini o‘rganish muhim ahamiyatga ega. Muhim topologik muammolardan biri bu bir to‘plamni boshqasiga qanday sharoitda aylanishini, u chegarani chegaraga, chekka nuqtalarni chekka nuqtalarga va boshqalarga o‘tishini aniqlash muammosidir.

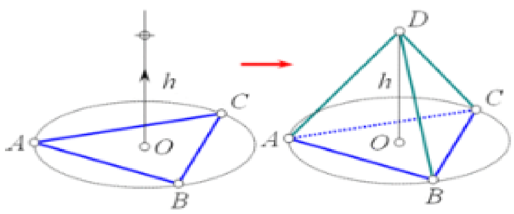
## TADQIQOT MATERIALLARI VA METODOLOGIYASI

**Eng avvalo simpleksning o’ziga ta’rif beraylik. Simpleks (lotincha so’zdan olingan bo’lib, soda degan ma’noni bildiradi)** — nuqta, kesma, uchburchak, tetraedrlarning fazodagi ko’p o’lchovli analogi umumiy soni hisoblanadi. Nol o’lchovli simpleks bu — nuqta, bir o’lchovli simpleks bu — kesma, ikki o’lchovli simpleks bu — uchburchak, uch o’lchovli simpleks bu — tetraedr, $n$-o’lchovli simpleks esa $n$-o’lchovli tetraedr bo’ladi, $n$-o’lchovli simpleksning $n$+1 ta uchi, $n \cdot n\ + 1$ ta qirrasi va har biri $n - 1$ o’lchovli sirtdan iborat. Shu yerda aytib o’tish lozimki, agar simpleksning uchlari $x_0, x_1 \dots, x_n$ vektorlar uchlarida joylashgan bo’lsa, ixtiyoriy nuqtasi $x = x_0 +\ x_1 + \dots + x_n$ vektorning uchidan iborat bo’ladi. $x$ nuqtaning baritsentrik koordinatalari deyiladi. Xususan, $x$ nuqta simpleksning baritsentri (og’irlik markazi) deyiladi. Kesmaning baritsentri uning o’rta nuqtasidan iborat. Geometriya va topologiyada murakkab obyektlar simplekslarga bo’lib o’rganiladi.

**Maqola davomida simpleks va uning xossalaridan keng foydalanamiz. Shuning uchun quyida simpleksning ayrim xossalarini keltiramiz.**




1-o’lchamli simpleksni 2-o’lchamli simpleksga almashtirish



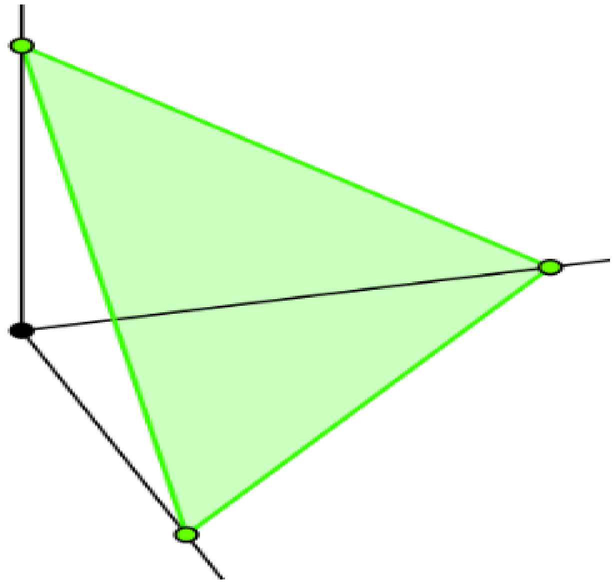

2- o’lchamli simpleksni 3-o’lchamli simpleksga almashtirish.

Chizib ko'rsatilgan simplekslarning barchasi quyidagi uchta umumiy xususiyatga ega:

1. Ta'rifga ko'ra, har bir figuraning qirralar soni fazo o'lchamidan Ta'rifga ko'ra, har bir figuraning qirralar soni fazo o'lchamidan bitta ortiq;

2. Kichik o'lchamdagi figuralarni katta o'lchamli figuralarga aylantirishning umumiy qoidasi mavjud. Bu shundan iboratki, simpleksning qaysidir nuqtasidan ushbu simpleksning affin qobig'ida (obolochka) yotmaydigan nur chiziladi va bu nurda yangi uch tanlanadi, u qirralar bilan berilgan qirralarning barcha uchlari bilan tutashtiriladi;

3. 2-bandda tasvirlangan jarayondan kelib chiqqan holda aytish mumkinki, simpleksning istalgan uchi barcha boshqa qirralar bilan tutashgan.



1-rasm. Yashil uchburchak standart 2-o'lchovli simpleks hisoblanadi.

Ma'lumki, ixtiyoriy simpleksga tashqi aylana chizish mumkin.

$K(L,n)-$ bu $n-$ o'lchamli ko'pyoqning $L-$ o'lchamli qirralari soni bulsin. U holda $n-$ o'lchamli simpleks uchun

$$K(L,n) = C_{n+1}^{L+1}$$

formula o'rinli bo'ladi. Xususan, yuqori o'lchamdagi qirralar soni uchlar soniga teng va $n+1$ bo'ladi:

$$K(0,n) = K(n-1,n) = n+1.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz:

$a -$ simpleksning tomonining uzunligi;

$H_n -$ balandligi;

$V_n -$ hajmi;

$R_n -$ tashqi chizilgan sferaning radiusi;

$r_n -$ ichki chizilgan sferaning radiusi;

$\alpha_n -$ ikki qirrali burchak.

Quyidagi formulalar o'rinli:

| $K(L,n) = \binom{n+1}{L+1}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $H_n = a\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$ | $H_n = R_n \frac{n+1}{n}$ | $H_2 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $H_3 = a\frac{\sqrt{6}}{3}$ | $H_4 = a\frac{\sqrt{10}}{4}$ |

| $K(L,n)=\binom{n+1}{L+1}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $H_n=a\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$ | $H_n=R_n\frac{n+1}{n}$ | $H_2=a\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $H_3=a\frac{\sqrt{6}}{3}$ | $H_4=a\frac{\sqrt{10}}{4}$ |
| $V_n=\frac{a^n}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$ | $V_n=\frac{R_n^n}{n!}\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$ | $V_2=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ | $V_3=a^3\frac{\sqrt{2}}{12}$ | $V_4=a^4\frac{\sqrt{5}}{96}$ |
| $R_n=a\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$ | $a=R_n\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}$ | $R_2=a\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $R_3=a\frac{\sqrt{6}}{4}$ | $R_4=a\frac{\sqrt{10}}{5}$ |
| $r_n=\frac{a}{\sqrt{2n(n+1)}}$ | $r_n=\frac{R_n}{n}$ | $r_2=a\frac{\sqrt{3}}{6}$ | $r_3=a\frac{\sqrt{6}}{12}$ | $r_4=a\frac{\sqrt{10}}{20}$ |
| $\cos\alpha=\frac{1}{n}$ | | | | |

Endi, asosiy mavzuni yoritamiz.

### 1. Bir o’lchamli simpleksda aniqlangan suryektiv kvadratik operatorlarning sinfini tavsiflari

$$V\,(S^{n-1})=S^{n-1},$$

bu yerda $S^{n-1}$ - (n-1) o‘lchovli simpleks, V - $S^{n-1}$ simpleksni $n-$ o’lchamli simpleksga o‘tkazuvchi kvadratik operator [У. А. Розиков, У. У. Жамилов, «F-квадратичные стохастические операторы», Матем. заметки, 83:4 (2008), 606–612].

Bunday operatorlar sinfini ajratib ko‘rsatish zarurati biologiyaning matematik modellarini o‘rganish bilan bog’liq. Chunki operatorlar uchun har qanday

$$(x_1', x_2', x_3', \dots \dots, x_n') \in S^{n-1}$$

holat birinchi avlodning avlodlari uchun har qanday $(x'_1, x_2', \dots, x_n') \in S^{n-1}$ holat har qanday avlodning avlodlari uchun mumkin bo‘ladi [Жамилов У.У., Розиков У.А. «О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе», Матем. сб., 2009, том 200, номер 9, 81–94].

$$S^1=\{(x_1,x_2): x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_1+x_2=1\}$$

simpleksda ixtiyoriy kvadratik operator V ni quyidagicha aniqlash mumkin:

$$V=\begin{cases} P_{11,1}=a, \quad P_{12,1}=b, \quad P_{22,1}=c, \\ P_{11,2}=1-a, \quad P_{12,2}=1-b, \quad P_{22,2}=1-c; \end{cases} \qquad (1)$$

bu yerda $0\leq a\leq 10\leq b\leq 10\leq c\leq 1$ ixtiyoriy sonlar; va (1) kvadratik operator tomonidan aniqlangan transformatsiya (0. 1) quyidagi shaklga ega:

$$\begin{cases} y_1=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2, \\ y_2=(1-a)x_1^2+2(1-b)x_1x_2+(1-c)x_2^2. \end{cases} \qquad (2)$$

Agar $S^1$ simpleksni $S^1=\{(x.\ 1\text{-}x): 0\leq x\leq 1\}$ kabi aniqlasak, (2) ni quyidagi tarzda qayta yozish mumkin:

$$\begin{cases} y=ax^2+2bx(1-x)+c(1-x)^2 \\ 1-y=(1-a)x^2+2(1-b)x(1-x)+(1-c)(1-x)^2 \end{cases}$$

Shubhasiz,

$$y=ax^2+2bx(1-x)+c(1-x)^2$$

funksiyaning o‘zgarish sohasi x∈[0,1] uchun [0,1] segmentga mos kelsa, V kvadratik operator suryektiv bo‘ladi.

Elementar soddalashtirishlardan so‘ng bu funksiyani quyidagi shaklda yozish mumkin:

$$y=(a-2b+c)x^2+2(b-c)x+c \qquad (3)$$

[0,1] segmentda aniqlanadigan (3) funksiyani ko‘rib chiqamiz va a, b va c koeffitsientlarida bu funksiya diapazoni [0,1] segmentga to‘g’ri keladi.

$a-2b+c>0$ bo‘lsin. Faqatgina quyidagi to‘rt holatda (2,3,4,5-rasmlarga qarang) (3) funksiya o‘zgaruvchanligi [0,1] segmentga to‘g'ri keladi. Keling, ushbu holatlarning har birini alohida ko‘rib chiqaylik. y(0) = c va y(1) = a bo‘lganligi sababli, birinchi holda (2-rasmga qarang) a = 1 va kvadrat trinomial (3) ning diskriminanti 0 ga teng, ya'ni,

$$4(\mathrm{b}-\mathrm{c})^2-4(\mathrm{a}-2\mathrm{b}+\mathrm{c})\mathrm{c}=0$$

yoki soddalashtirishdan so‘ng,

$$\mathrm{b}^2-\mathrm{ac}=0,$$

bo‘ladi, bundan

$$\mathrm{a}=1\,,\ \mathrm{b}^2=\mathrm{c}. \qquad (4)$$

y = 0 tenglamaning ko‘p sonli x* ildizi [0,1] oralig'ida yotishi kerakligi sababli, bizda

$$\mathrm{x}^*=-\frac{\mathrm{b}-\mathrm{c}}{\mathrm{a}-2\mathrm{b}+\mathrm{c}}\geq 0$$

(4) asosida bu faqat $b=0$ yoki $b=1$, ya'ni bu holda x* = 0 uchun mumkin, ammo $a-2b+c>0$ bo‘lgani tufayli, ya'ni, $b=1$ holat chiqarib tashlandi. Shunday qilib, birinchi holatda $a=1, b=0, c=0$ bo‘lganda mumkin. Ikkinchi holatda (3-rasmga qarang), $c=1$, bundan

$$b^2=a \qquad (5)$$

Boshqa tomondan,

$$\mathrm{x}^*=\frac{\mathrm{c}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}-2\mathrm{b}+\mathrm{c}}\leq 1 \qquad (6)$$

u holda, (6) da b≤a bo‘lganda (7) mavjud.

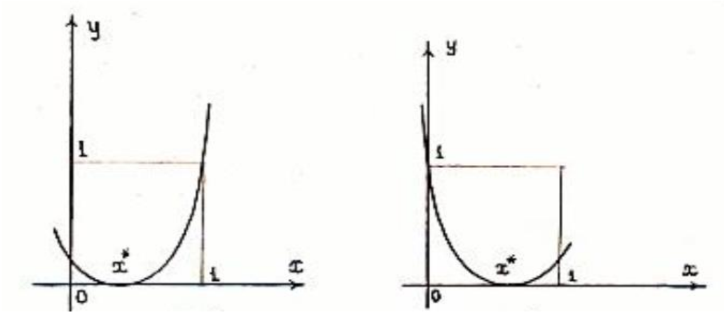
(5)-(7) dan kelib chiqadiki, $b=0$ yoki $b=1$. $a-2b+c>0$ bo‘lgani uchun, $b=1$ holat chiqarib tashlanadi. Shunday qilib $a=0,\ b=0,\ c=1$ holatda mumkin.

Endi uchinchi holatni ko‘rib chiqamiz (4-rasmga qarang). Bu yerda $\mathrm{c}=0, a=1.$ $0<b<1/2$ uchun $\mathrm{x}^*<0$ bo‘lsa, u holda uchinchi holat $a=1,\ b\,\epsilon\,(0;\frac{1}{2})$ va $\mathrm{c}=0$ uchun amalga oshiriladi.

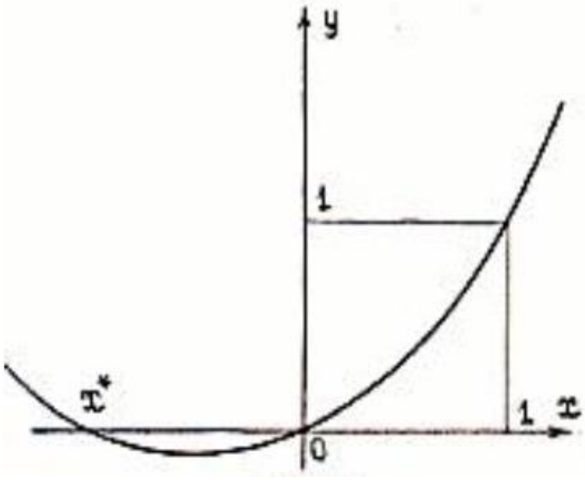
To‘rtinchi holatda (5-rasmga qarang) $\mathrm{c}=1, a=1$ va $\mathrm{x}^*>1$, $a-2b+c>0$ bo‘lgani uchun, nihoyat, $a=0, 0<b<1/2$ va $\mathrm{c}=1$ bo‘lganda to‘rtinchi holat bo‘lishi mumkin. $a-2b+c=0$ uchun faqat ikkita holat bo‘lishi mumkin (6-rasmga qarang). Agar $\mathrm{c}=0, a=1$ bo‘lsa, bu yerda $b=1/2$, ikkinchi holat (7-rasmga qarang), $\mathrm{c}=1, \mathrm{a}=0$ bo‘lsa, $b=1/2$ bo‘ladi.

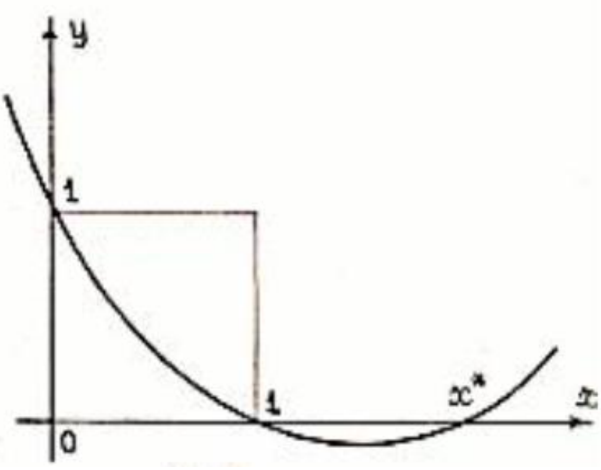
Endi $\mathrm{a}-2b+c<0$ bo‘lsin. Bu yerda to‘rtta holat ham bo‘lishgi mumkin (8,9,10,11-rasmlarga qarang).

Birinchi holatni ko‘rib chiqamiz (8-rasmga qarang). Bu yerda $\mathrm{c}=0$ funksiyaning biriga teng bo‘lgan maksimal $x\epsilon[0,1]$ nuqtasiga erishiladi.

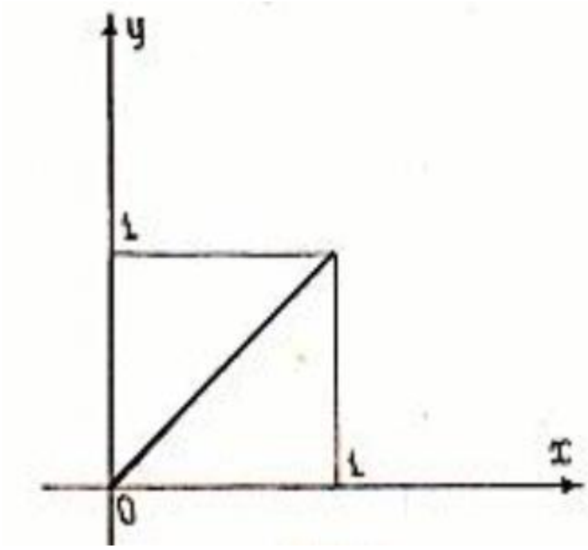


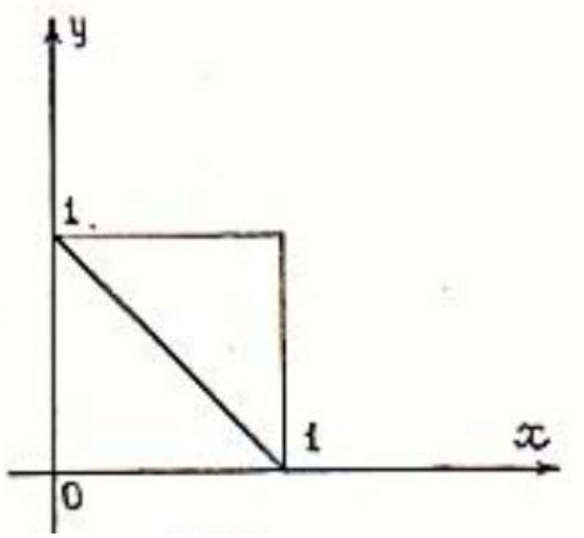
2-rasm 3-rasm




4-rasm 5-rasm




6-rasm 7-rasm

(3) funksiyaning kritik nuqtasi

$$x^* = \frac{c - b}{a - 2b + c}$$

yoki bu holda $x^* = \frac{b}{2b-a}$ va $y(x^*) = 1/b$; va $y(x^*) = 1$ bo‘lgani uchun, b=1 va shunga mos ravishda a=1 bo‘lganda mumkin. Shunday qilib birinchi holat a=1, $b = 1$ va $c = 0$ hamda $x^* = 1$ uchun bir vaqtning o‘zida sodir bo‘ladi.

Ikkinchi holda (9-rasmga qarang) a = 0 va funksiyaning biriga teng bo‘lgan maksimal qiymatiga $x^* \in [0,1]$ nuqtada erishiladi. Bu holda kritik nuqta

$$x^* = \frac{b - c}{2b - c}$$

va $y(x^*)=1$ shartidan $b = 2b - c$ yoki $b^2 - c = b - c$ ekanligi kelib chiqadi. $2b - c > 0$ bo‘lgani uchun, $x^* \geq 0$ shartdan $b - c \geq 0$; va $b^2 - b \leq 0$ bo‘lgani uchun biz b=1 va c=1 ga erishamiz. Shunday qilib, bu holat $a = 0, b = 1, c = 1$ va shu bilan birga x* =0 uchun sodir bo‘ladi.

Uchinchi holatda (10-rasmga qarang) $c = 0, a = 1;\ b > 1/2$ uchun $y = 0$ tenglamaning ikkinchi x* ildizi bittadan kattaroq bo‘ladi. Shuning uchun bu holat $a = 1, 1/2 < b < 1$ va $c = 1$ uchun sodir bo‘ladi.

Biz operatorlarning ikkita

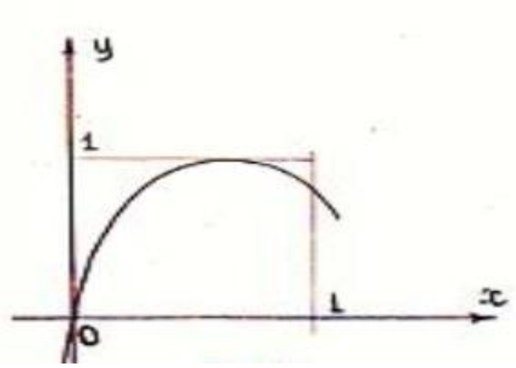
$\gamma = \{V_b : 0 \le b \le 1\}$ va $\bar{\gamma} = \{V_b : 0 \le b \le 1\}$

sinflarini aniqlaymiz, bu yerda

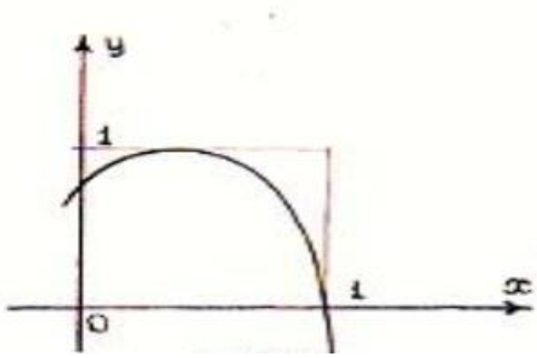
$$V_b = \begin{cases} P_{11,1} = 1, & P_{12,1} = b, \quad P_{22,1} = 0 \\ P_{11,2} = 0, & P_{12,2} = 1 - b, \quad P_{22,2} = 1 \end{cases}$$

va

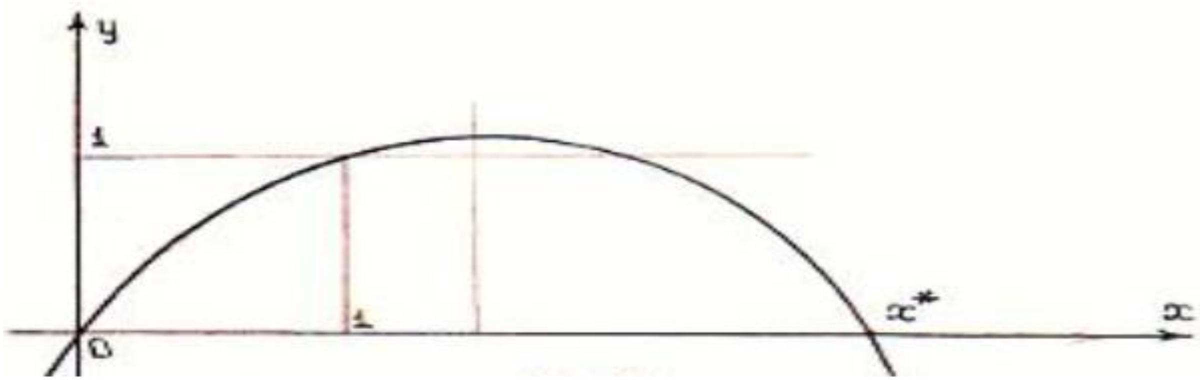
$$\overline{V_b} = \begin{cases} P_{11,1} = 1, & P_{12,1} = b, \quad P_{22,1} = 0 \\ P_{11,2} = 0, & P_{12,2} = 1 - b, \quad P_{22,2} = 1 \end{cases}$$



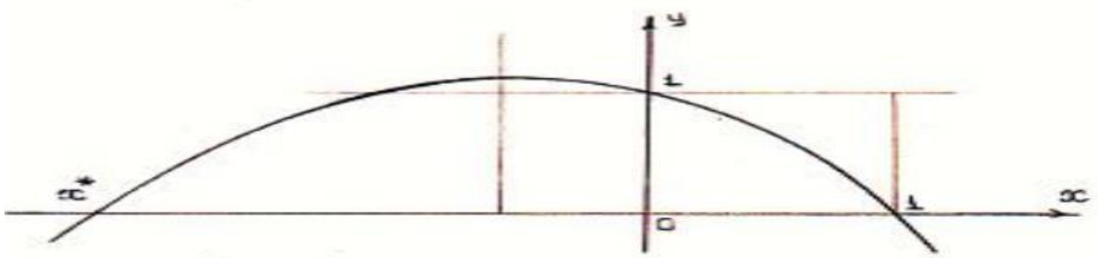

8-rasm




9-rasm




10-rasm




11-rasm

Yuqorida ko‘rib chiqilgan xususiy hollar shuni anglatadi.

**Teorema 1.** Bir o’lchamli sodda simpleksda aniqlangan V kvadratik operatori suryektiv bo‘lishi uchun uning $\gamma(b)$ sinfga yoki $\overline{\gamma(b)}$ sinfga tegishli bo‘lishi zarur va yetarli.

Yuqorida ko‘rib chiqilgan holatlardan ko‘rinib turibdiki, istalgan $b\in[0,1]$ uchun $V_b$ yoki $\overline{V_b}$ kvadratik operatorlari sodda simpleks $S^1$ ning bir o’lchamli simpleksga birma-bir o‘tkazishidir, natijada biz quyidagi teoremaga egamiz.

**Teorema 2.** Bir o’lchammli sodda simpleksda aniqlangan $\overline{V}$ kvadratik operatori ikki tomonlama bo‘lishi uchun uchun uning suryektiv bo‘lishi zarur va yetarli.

**2. Ikki o’lchfmli simpleksda berilgan suryektiv kvadratik operatorlarning sinfini tavsifi haqida**

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

da ixtiyoriy kvadratik operator V quyidagicha aniqlanadi:

$$V = \begin{cases} P_{11,1}\ \ P_{22,1} P_{33,1} P_{12,1} P_{13,1} P_{23,1} \\ P_{11,2}\ \ P_{22,2} P_{33,2} P_{12,2} P_{13,2} P_{23,2} \\ P_{11,3} P_{22,3} P_{33,3} P_{12,3} P_{13,3} P_{23,3} \end{cases} \qquad (2.1)$$

bu yerda $0 \leq P_{ij,k} \leq 1$ keyin (2.1) kvadratik operator tomonidan aniqlangan (0.1) transformatsiyalar quyidagi shaklga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{i,j=1}^{3} P_{ij,1} x_i x_j \\ x_2 = \sum_{i,j=1}^{3} P_{ij,2} x_i x_j \\ x_3 = \sum_{i,j=1}^{3} P_{ij,3} x_i x_j \end{cases} \qquad (2.2)$$

Ushbu bo‘limda biz suryektiv kvadratik operatorlarning oltita sinfini aniqlaymiz va ular suryektiv kvadratik operatorlarning butun to‘plamini to‘ldirishini isbotlaymiz. Ushbu sinflarni tavsiflash uchun biz muntazam ko‘pburchaklarning o‘zaro kelishuv guruhlaridan foydalanamiz (1.1 ga qarang). Ikki o’lchamli simpleksda muntazam uchburchak bo‘lgani uchun (12-rasmga qarang), bu nazariya amal qiladi.

O‘z-o‘zidan aylantirish harakatni anglatadi, ya'ni, metrikani saqlaydigan transformatsiya. $\Delta A_1A_2A_3$ muntazam uchburchagining o‘z-o‘zini aralashtirish guruhi 6 ta elementdan iborat bo‘lib, ushbu guruhning uchta elementi uchburchak tekisligini mos ravishda O simmetriya markazi atrofida $0^0$, $120^0$ va $240^0$ ga burishdan (1-rasmga qarang), qolgan uchta element esa uchburchak tekisligini mos ravishda $A_1A_1^{`}$, $A_2A_2^{`}$ va $A_3A_3^{`}$ medianalari atrofida $180^0$ ga burishdan hosil bo‘ladi. bu guruh elementlari quyidagicha aniq yoziladi (1 ga qarang):

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ A_1A_2A_3 \end{pmatrix} \pi_2 = \begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ A_2A_3A_1 \end{pmatrix} \pi_5 = \begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ A_3A_1A_2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ A_3A_1A_2 \end{pmatrix} \pi_4 = \begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ A_1A_3A_2 \end{pmatrix} \pi_6 = \begin{pmatrix} A_1A_2A_3 \\ A_2A_1A_3 \end{pmatrix}$$

G guruhi kommutativ emas va H=( $\pi_1, \pi_2, \pi_3$) G ning eng katta komutativ qism guruhidir. Sodda $S^2$ da aniqlangan kvadratik V operator o‘z-o‘zidan tenglashishga mos keladi, agar V operator ikki o’lchamli simpleksda chegaralarini chegaralarga va simpleksning qirralarini o‘z-o‘zidan to‘g’rilash $\pi_i(i\ =\ 1,2, \dots \dots, 6)$ bilan bir xil tarzda oladigan bo‘lsa. Keling, har qanday suryektiv kvadratik operatorning qandaydir o‘zaro moslashishga mos kelishini isbotlaylik.

**Teorema 3.** Ikki o'lchamli simpleksda berilgan har qanday suryektiv kvadratik operator, $\pi_i(i = 1,2,\ldots\ldots,6)$ o'z-o'zidan moslashishga mos keladi.

Teoremaning isbotini quyidagi uchta lemmaning isboti orqali ko'rib chiqamiz.

**Lemma 1.** V - suryektiv kvadratik operator bo'lsin. U holda Ikki o'lcmli simpleksning biron bir ichki nuqtasi V ning xaritasi ostidan simpleks tepaliklaridan biriga o'tolmaydi.

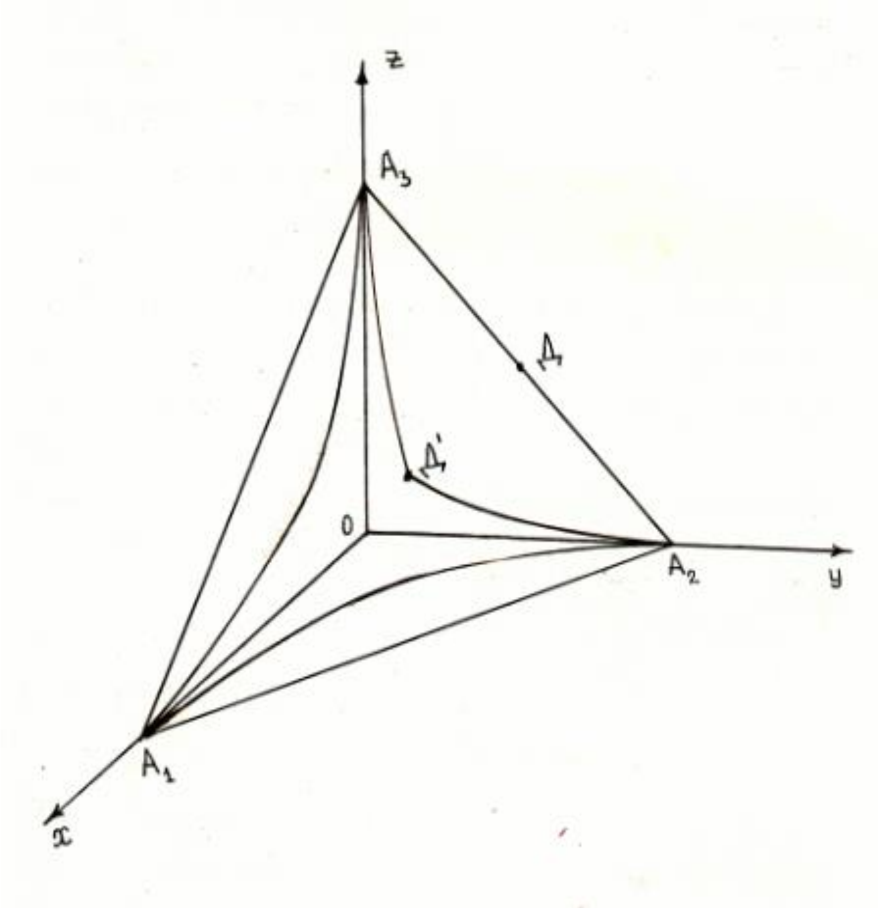
**Isbot.** Ba'zi i = 1,2,3 lar uchun $A = (x_1, x_2, x_3) \in \text{Int } S^2$ va V(A)=$A_i$ bo'lsin (12-rasmga qarang), bu yerda $A_i$ - tepalikdir. i=1 holatini ko'rib chiqamiz (boshqa holatlar xuddi shu tarzda ko'rib chiqiladi). V(A)=$A_i$ tenglikdan quyidagi kelib chiqadi

$$\begin{cases} 1 = a_1x_1^2 + b_1x_2^2 + c_1\ x_3^2 + 2\ \propto_1 x_1x_2 + 2\ \beta_1x_1x_2 + 2\ \gamma_1x_2x_3 \\ 0 = a_2x_1^2 + b_2x_2^2 + c_2\ x_3^2 + 2\ \propto_2 x_1x_2 + 2\ \beta_2x_1x_2 + 2\ \gamma_2x_2x_3 \\ 0 = a_3x_1^2 + b_3x_2^2 + c_3\ x_3^2 + 2\ \propto_3 x_1x_2 + 2\ \beta_3x_1x_2 + 2\ \gamma_3x_2x_3 \end{cases}$$

ya'ni, $x_1x_2x_3 > 0$ bo'lsa, bundan

$$\begin{cases} a_1 = 1\ \ b_1 = 1\ \ c_1 = 1\ \ \alpha_1 = 1\ \ \beta_1 = 1\ \ a_1 = 1 \\ a_2 = 0\ \ b_2 = 0\ \ c_2 = 0\ \ \alpha_2 = 0\ \ \beta_2 = 0\ \ \gamma_2 = 0 \\ a_3 = 0\ \ b_3 = 0\ \ c_3 = 0\ \ \alpha_3 = 0\ \ \beta_3 = 0\ \ \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

kelib chiqadi. Keyin har qanday $A = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$V(A)=$A_i$ nuqta uchun, ya'ni, V ( $S^2$ ) ={$A_1$} suryektivlikka zid keladi.




12-rasm

**Lemma 2.** V – bizga berilgan suryektiv bo'lgan kvadratik operator bo'lsin. U holda simpleksning biron bir ichki nuqtasini V almashtirish ostida simpleksning chegara nuqtasiga o'tkazish mumkin emas.

**Isbot.** $A=(x_1,x_2,x_3)\in \mathrm{Int}S^2$ bo‘lsin, ya’ni, $x_1\cdot x_2\cdot x_3>0$. Aniqlik uchun $V(A)\in[A_2A_3]$ deb taxmin qilsak, u holda bu

$$x_1'=0=a_1x_1^2+b_1x_2^2+c_1x_3^2+2\ \propto_1 x_1x_2+2\ \beta_1x_1x_2+2\ \gamma_1x_2x_3$$

tenglikdan $a_1=b_1=c_1=\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=0$, shunda har qanday $A\in S^2$ nuqta uchun $V(A)\in[A_2A_3]$ ga egamiz, ya’ni, $V(S^2)c[A_2A_3]$. Bu esa suryektivlikka zid keladi.

**Lemma 3.** V suryektiv bo’lgan kvadratik operator bo‘lsin. Berilgan V almashtirishda kvadratik operatorning chekka nuqtalaridan tashqari har qanday ichki nuqtasini simpleks chekka nuqtalaridan biriga o‘tkazib bo‘lmaydi.

**Isbot.** $A=(x_1,x_2,x_3)\in\partial S^2$, $A_1\neq A, A_2\neq A, A_3\neq A$ bo‘lsin; va aniqlik uchun $A\in[A_1A_3]$ deb olamiz. Biz $V(A)\neq A_1, V(A)\neq A_2$ va $V(A)\neq A_3$ ni isbot qilishimiz kerak. Biz buni teskaridan faraz qilamiz, aniqlik uchun $V(A)=A_1$. Keyin

$$\begin{cases}x_1'=1=a_1x_1^2+b_1x_2^2+c_1x_3^2+2\ \propto_1 x_1x_2+2\ \beta_1x_1x_2+2\ \gamma_1x_2x_3\\ x_2'=0=a_2x_1^2+b_2x_2^2+c_2x_3^2+2\ \propto_2 x_1x_2+2\ \beta_2x_1x_2+2\ \gamma_2x_2x_3\\ x_3'=0=a_3x_1^2+b_3x_2^2+c_3x_3^2+2\ \propto_3 x_1x_2+2\ \beta_3x_1x_2+2\ \gamma_3x_2x_3\end{cases}$$

bundan $a_2=a_3=c_2=c_3=\gamma_3=\gamma_2=0$, shunda har qanday $A\in[A_1A_3]$ nuqta uchun $V(A)=A_1$ ga egamiz, ya’ni, $V([A_1A_3])=A_1$. Bu esa suryektivlikka zid keladi.

**3-teoremaning isboti.** Suryektiv bo’lgan kvadratik operator simpleks chekka nuqtalarini tepchekka nuqtalarga va qirralarni qirralarga o‘tkazadi, ya’ni, o‘sha suryektiv kvadratik operator ba'zi bir $\pi_i$, (i=1,2,….,6) o‘zaro moslashishga mos keladi.

Endi muntazam uchburchakning har bir o‘z-o‘zini tekislashiga mos keladigan kvadratik operatorlarning turini aniqlaymiz. $\pi_i$ o‘z-o‘zidan moslashtirishdan boshlaylik. Ushbu o‘zaro moslashishga mos keladigan kvadratik operator V quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

$$V(A_1)=A_1\ ,V(A_2)=A_2\ ,V(A_3)=A_3\ \text{ va shuningdek}$$
$$V(A_1A_2)=A_1A_2, V(A_2A_3)=A_2A_3 \text{ va } V(A_1A_3)=A_1A_3.$$

Agar biz ushbu shartlarni $A_1(1{,}0{,}0), A_2(0{,}1{,}0)$ va $A_3(0{,}0{,}1)$ larni hisobga olgan holda (2.2) yordamida qayta yozsak, unda quyidagi munosabatni olamiz:

$$\begin{cases}P_{11,1}=1 & P_{22,1}=0 & P_{33,1}=0\\ P_{11,2}=0 & P_{22,2}=1 & P_{33,2}=0\\ P_{11,3}=0 & P_{22,3}=0 & P_{33,3}=1\end{cases}\qquad (2.3)$$

Endi biz $A_1A_2$ chetiga tegishli ixtiyoriy nuqta koordinatalari quyidagicha bo’lgan (x, 1-x, 0) ga ega bo‘lgani uchun, V ( $A_1A_2$ )= $A_1A_2$ dan

$$x_3'=0=P_{11,3}x^2+P_{22,3}(1-x)^2+2P_{12,3}x(1-x)$$

va (2.3) dan

$$2P_{12,3}x(1-x)$$

kelib chiqadi. Bu yerda $P_{12,3}=0$

Huddi shunday, $V(A_1A_3)=A_1A_3$ dan

$$0=x'=P_{11,2}x^2+P_{33,2}(1-x)^2+2P_{13,2}x(1-x)$$

kelib chiqadi va (2.3) dan $P_{13,2}=0$ ga ega bo‘lamiz.

Shunday qilib, yuqorida aytib o’tilganidek o‘z-o‘zini tekshirishlar $\pi_i$ ga mos keladigan kvadratik bo’lgan operatorlar quyidagi shaklga ega bo’ladi:

$$V_1(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases}P_{11,1}=1\quad P_{22,1}=0\ P_{33,1}=0\ P_{12,1}=\alpha\ P_{13,1}=\beta\ P_{23,1}=0\\ P_{11,2}=0\ \ P_{22,2}=1\ P_{33,2}=0\ P_{12,2}=1-\alpha\ P_{13,2}=0\ P_{23,2}=\gamma\\ P_{11,3}=0\ \ P_{22,3}=0\ P_{33,3}=1\ P_{12,3}=0\ P_{13,3}=1-\beta\ P_{23,3}=1-\gamma\end{cases}$$

bu yerda $\alpha, \beta, \gamma$ -

$$0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1, 0 \le \gamma \le 1$$

shartlarni qanoatlantiradigan ixtiyoriy o'zgarmas sonlardir.

Shubhasiz, $\pi_i$ o'z-o'zini moslashtirishga mos keladigan kvadratik operatorlarning qavariq bo'lgan chiziqli birikmasi ham biz qarayotgan ushbu o'z-o'zini moslashtirishlarga mos kelaveradi.

O'z-o'zidan moslashtirish bo'lgan $\pi_i$ ga mos keladigan kvadratik $V_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ operator $\pi_i$ bilan o'zaro mos kelishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham quyidagi $\alpha=\beta=\gamma=1/2$ uchun $V_1(1/2;\ 1/2;1/2)$ kvadratik operatori bir xil operator bo'ladi, ya'ni,

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3, \\ x_2' = x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_3, \\ x_3' = x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3, \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} x_1' = x_1(x_1 + x_2 + x_3), \\ x_2' = x_2(x_1 + x_2 + x_3), \\ x_3' = x_3(x_1 + x_2 + x_3), \end{cases}$$

bu tengliklardan, biz $x_1+x_2+x_3=1$ dan boshlab, $V_1(1/2;\ 1/2;\ 1/2)$ ning o'z-o'zini tekislashishi $\pi_i$ ga to'g'ri kelishini ko'ramiz. $V_1(\alpha, \beta, \gamma)$ sinfining kvadratik operatorlari uchun (2.2) quyidagicha shaklga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2 \propto x_1x_2 + 2\beta x_1x_3 \\ x_2' = x_2^2 + 2(1-\alpha)x_1x_2 + 2\gamma x_2x_3 \\ x_3' = x_3^2 + 2(1-\beta)x_1x_3 + 2(1-\gamma)x_2x_3 \end{cases}$$

yoki ba'zi bir almashtirishlardan so'ng

$$\begin{cases} x_1' = x_1[1 + (2 \propto -1)x_2 + (2\beta - 1)x_3] \\ x_2' = x_2[(1-2\alpha)x_1 + 1 + (2\gamma - 1)x_3] \\ x_3' = x_3[(1-2\beta)x_1 + (1-2\gamma)x_2 + 1] \end{cases} \qquad (2.4)$$

(2.4) shakldagi kvadratik operatorlar - Volterra operatorlar sinfiga tegishli bo'ladi. O'rganilayotgan mazkur operatorlar sinfi [Ганиходжаев Р.Н Квадратичные стохастические операторы, Функции Ляпунова и турниры / / Матем.сб.-1992.Т.183, -№8, -С.119-140.] da etarlicha chuqur o'rganilgan. Xususan, bunda Volterra kvadratik operatorlar yakkama-yakka va o'zaro uzluksiz operatorlardir [Ганиходжаев Р.Н Квадратичные стохастические операторы, Функции Ляпунова и турниры / / Матем.сб.-1992.Т.183, -№8, С.119-140.]. Shuning uchun biz qarayotgan hollarda quyidagilar mavjud:

**Natija 1.** $\pi_i$ o'z-o'zini moslashtirishga mos keladigan ixtiyoriy suryektiv bo'lgan kvadratik operator – bu ikki o'lchamli simpleksning gomeomorfizmi bo'ladi. Oldinda bajarilgan o'ta murakkab bo'lgan hisob-kitoblarni qayta bajarmasdan, bizlar $\pi_i$ boshqa o'zaro kelishuvlariga mos keladigan suryektiv bo'lgan kvadratik operatorlarning sinflarining tavsifini taqdim qilamiz. $\pi_i$ $(i = 2,3,4,5,6)$ o'z-o'zini moslashtirishlarga mos kelayotgan suryektiv kvadratik operator $V_i(\alpha, \beta, \gamma)$ biz tomondan aniqlanishini ko'rsatamiz:

$V_2(\alpha, \beta, \gamma)$ kvadratik operator pastda keltirilgan shakllarga ega bo'ladi:

$$V_2(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$=\begin{cases} P_{11,1}=0 \quad P_{22,1}=0 \ P_{33,1}=1 \ P_{12,1}=0 \ P_{13,1}=\beta \ P_{23,1}=\gamma \\ P_{11,2}=1 \ \ P_{22,2}=0 \ P_{33,2}=0 \ P_{12,2}=\alpha \ P_{13,2}=1-\beta \ P_{23,2}= \ 0 \\ P_{11,3}=0 \ \ P_{22,3}=1 \ P_{33,3}=0 \ P_{12,3}=1-\alpha \ P_{13,3}=0 \ P_{23,3}=1-\gamma \end{cases}$$

bunda $\alpha,\beta,\gamma-$

$$0\le\alpha\le1, 0\le\beta\le1, 0\le\gamma\le1.$$

shartlarni qanoatlantiradigan ixtiyoriy bo'lgan o'zgarmas sonlar.

Bunday hollarda (2.2.) quyidagicha shakllar ko'rinishini oladi:

$$\begin{cases} x_1'=x_3^2+2\beta x_1x_3+2\gamma x_2x_3 \\ x_2'=x_1^2+2\alpha x_1x_2+2(1-\beta)x_1x_3 \\ x_3'=x_2^2+2(1-\alpha)x_1x_2+2(1-\gamma)x_2x_3 \end{cases}$$

yoki bir qator soddalashtirishlardan so'ng

$$\begin{cases} x_1'=x_3[1+(2\beta-1)x_1+(2\gamma-1)x_2] \\ x_2'=x_1[1+(2\alpha-1)x_1+(1-2\beta)x_3] \\ x_3'=x_2[1+(1-2\alpha)x_1+(1-2\gamma)x_3] \end{cases}$$

$\alpha=\beta=\gamma=1/2$ uchun kvadratik operator $V_2(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ o'z-o'zini tekislashi $\pi_2$ ga to'g'ri kelishini tekshirish oson. $\pi_3$ o'zaro moslashishga mos keladigan kvadratik operatorlar quyidagicha shakllarga ega bo'ladi:

$$V_3(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} P_{11,1}=0 \quad P_{22,1}=1 \ P_{33,1}=0 \ P_{12,1}=\alpha \ P_{13,1}=0 \ P_{23,1}=\gamma \\ P_{11,2}=0 \ \ P_{22,2}=0 \ P_{33,2}=1 \ P_{12,2}=0 \ P_{13,2}=\beta \ P_{23,2}=1-\gamma \\ P_{11,3}=1 \ \ P_{22,3}=0 \ P_{33,3}=0 \ P_{12,3}=1-\alpha \ P_{13,3}=1-\beta \ P_{23,3}=0 \end{cases}$$

bu yerda $0\le\alpha\le1, 0\le\beta\le1, 0\le\gamma\le1.$

Kvadratik bo'lgan operatorlarning mazkur sinfi uchun (2.2) quyidagicha shakllarni oladi:

$$\begin{cases} x_1'=x_2^2+2\propto x_1x_2+2\,\gamma\, x_2x_3 \\ x_2'=x_3^2+2\,\beta\, x_1x_3+2(1-\gamma)x_2x_3 \\ x_3'=x_1^2+2(1-\alpha)x_1x_2+2(1-\beta)x_1x_3 \end{cases}$$

yoki ba'zi bir soddalashtirishlardan keyin

$$\begin{cases} x_1'=x_2[(2\alpha-1)x_1+1+(2\gamma-1)x_3], \\ x_2'=x_3[(2\beta-1)x_1+(1-2\gamma)x_2+1], \\ x_3'=x_1[1+(1-2\alpha)x_2+(1-2\beta)x_3], \end{cases}$$

bu yerda $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$ uchun V3 (1/2; 1/2; 1/2) kvadratik operator $\pi_3$ o'z-o'zini tekislash bilan mos tushishini tekshirish ham oson.

$\pi_4$ o'z-o'zini tekislashga o'zaro mos keladigan kvadratik operatorlar quyidagicha shaklga ega:

$$V_4(\alpha,\beta,\gamma)=$$

$$=\begin{cases} P_{11,1}=1 \quad P_{22,1}=0 \ P_{33,1}=0 \ P_{12,1}=\alpha \ P_{13,1}=\beta \ P_{23,1}=0, \\ P_{11,2}=0 \ \ P_{22,2}=0 \ P_{33,2}=1 \ P_{12,2}=0 \ P_{13,2}=1-\beta \ P_{23,2}= \ \gamma, \\ P_{11,3}=0 \ \ P_{22,3}=1 \ P_{33,3}=0 \ P_{12,3}=1-\alpha \ P_{13,3}=0 \ P_{23,3}=1-\gamma, \end{cases}$$

bu yerda $0\le\alpha\le1,\ \ 0\le\beta\le1,\ \ 0\le\gamma\le1.$

Ushbu sinflar uchun o'zgartirish kiritib kvadratik operatorlari (2.2) quyidagi tarzdagidek qayta yozish mumkin:

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2\,\alpha\, x_1x_2 + 2\,\beta\, x_1x_3, \\ x_2' = x_3^2 + 2\,(1-\beta)x_1x_3 + 2\gamma x_2x_3, \\ x_3' = x_2^2 + 2(1-\alpha)x_1x_2 + 2(1-\gamma)x_2x_3, \end{cases}$$

yoki ba'zi bir o‘zgarishlardan so’ngra

$$\begin{cases} x_1' = x_2[(2\alpha-1)x_2 + 1 + (2\beta-1)x_3], \\ x_2' = x_3[(1-2\beta)x_1 + (2\gamma-1)x_2 + 1], \\ x_3' = x_1[1 + (1-2\alpha)x_1 + (1-2\gamma)x_3], \end{cases}$$

bunda $\alpha = \beta = \gamma = 1/2$ bo’lgan hol uchun $V_2(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ kvadratik operator $\pi_2$ o‘z-o‘zini tekislash bilan mos tushishini ham tekshirish ancha oson.

$\pi_3$ o‘z-o‘zini tekislashga mos keladigan kvadratik operator quyidagi shaklga ega:

$$V_3(\alpha,\beta,\gamma) =$$

$$= \begin{cases} P_{11,1} = 0 \quad P_{22,1} = 1 \;\; P_{33,1} = 0 \;\; P_{12,1} = \alpha\, P_{13,1} = 0 \;\; P_{23,1} = \gamma, \\ P_{11,2} = 0 \;\; P_{22,2} = 0 \;\; P_{33,2} = 1 \;\; P_{12,2} = 0 \;\; P_{13,2} = \beta \;\; P_{23,2} = 1-\gamma, \\ P_{11,3} = 1 \;\; P_{22,3} = 0 \;\; P_{33,3} = 0 \;\; P_{12,3} = 1-\alpha \;\; P_{13,3} = 1-\beta \;\; P_{23,3} = 0, \end{cases}$$

bu yerda $0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1, 0 \le \gamma \le 1$.

Kvadratik operatorlarning ushbu sinfi uchun (2.2) quyidagi shaklga aga bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1' = x_2^2 + 2 \propto x_1x_2 + 2\,\gamma\, x_2x_3, \\ x_2' = x_3^2 + 2\,\beta\, x_1x_3 + 2(1-\gamma)x_2x_3, \\ x_3' = x_1^2 + 2(1-\alpha)x_1x_2 + 2(1-\beta)x_1x_3, \end{cases}$$

yoki ba'zi bir o‘zgarishlardan keyin

$$\begin{cases} x_1' = x_2[(2\alpha-1)x_1 + 1 + (2\gamma-1)x_3], \\ x_2' = x_3[(2\beta-1)x_1 + (1-2\gamma)x_2 + 1], \\ x_3' = x_1[1 + (1-2\alpha)x_2 + (1-2\beta)x_3], \end{cases}$$

bu yerda $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$ uchun $V_3$ (1/2; 1/2; 1/2) kvadratik operator $\pi_3$ o‘z-o‘zini tekislash bilan mos tushishini tekshirish ham qiyin emas.

$\pi_4$ o‘z-o‘zini tekislashga mos keladigan kvadratik operator quyidagicha ko’rinishga egaligini ko’rish mumkin:

$$V_4(\alpha,\beta,\gamma) =$$

$$= \begin{cases} P_{11,1} = 1 \quad P_{22,1} = 0 \;\; P_{33,1} = 0 \;\; P_{12,1} = \alpha \;\; P_{13,1} = \beta \;\; P_{23,1} = 0, \\ P_{11,2} = 0 \;\; P_{22,2} = 0 \;\; P_{33,2} = 1 \;\; P_{12,2} = 0 \;\; P_{13,2} = 1-\beta \;\; P_{23,2} = \gamma, \\ P_{11,3} = 0 \;\; P_{22,3} = 1 \;\; P_{33,3} = 0 \;\; P_{12,3} = 1-\alpha \;\; P_{13,3} = 0 \;\; P_{23,3} = 1-\gamma, \end{cases}$$

bu yerda $0 \le \alpha \le 1,\;\; 0 \le \beta \le 1,\;\; 0 \le \gamma \le 1$.

Kvadratik operatorlarning ushbu sinfi uchun (2.2) quyidagicha ko‘rinishga yoki shakllarga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2\,\alpha\, x_1x_2 + 2\,\beta\, x_1x_3, \\ x_2' = x_3^2 + 2\,(1-\beta)x_1x_3 + 2\gamma x_2x_3, \\ x_3' = x_2^2 + 2(1-\alpha)x_1x_2 + 2(1-\gamma)x_2x_3, \end{cases}$$

yoki bir nechta almashtirishlar bajargandan so’ng

$$\begin{cases} x_1' = x_2[(2\alpha-1)x_2 + 1 + (2\beta-1)x_3], \\ x_2' = x_3[(1-2\beta)x_1 + (2\gamma-1)x_2 + 1], \\ x_3' = x_1[1 + (1-2\alpha)x_1 + (1-2\gamma)x_3], \end{cases}$$

va bu holda, $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$ uchun $V_4(1/2;1/2;1/2)$ kvadratik operator $\pi_4$ o‘z-o‘zini tekislash bilan mos kelishini ko’rish mumkin.

$\pi_5$ o‘z-o‘zini moslashtirishga mos keladigan kvadratik operatorlar quyidagi korinishga ega bo’ladi:

$$V_5(\alpha,\beta,\gamma)=$$
$$=\begin{cases} P_{11,1}=0 \quad P_{22,1}=0 \;\; P_{33,1}=1 \;\; P_{12,1}=0 \; P_{13,1}=\beta \;\; P_{23,1}=\gamma, \\ P_{11,2}=0 \;\; P_{22,2}=1 \;\; P_{33,2}=0 \;\; P_{12,2}=\alpha \;\; P_{13,2}=0 \;\; P_{23,2}=\;1-\gamma, \\ P_{11,3}=1 \quad P_{22,3}=0 \;\; P_{33,3}=0 \;\; P_{12,3}=1-\alpha \;\; P_{13,3}=1-\beta \;\; P_{23,3}=0, \end{cases}$$

bunda $0\le\alpha\le1,\;\; 0\le\beta\le1,\;\; 0\le\gamma\le1.$

Mazkur o’rganilayotgan kvadratik operatorlar sinfi uchun (2.2) quyidagicha shaklga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1'=x_3^2+2\,\beta\,x_1x_3+2\,\gamma\,x_2x_3, \\ x_2'=x_2^2+2\,\alpha\,x_1x_2+2(1-\gamma)x_2x_3, \\ x_3'=x_1^2+2(1-\alpha)x_1x_2+2(1-\beta)x_1x_3, \end{cases}$$

yoki, soddalashtirilganidan keyin

$$\begin{cases} x_1'=x_3[(2\beta-1)x_1+1+(2\gamma-1)x_2], \\ x_2'=x_2[(2\alpha-1)x_1+(1-2\gamma)x_3+1], \\ x_3'=x_1[1+(1-2\alpha)x_2+(1-2\beta)x_3], \end{cases}$$

bu yerda ham, $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$ uchun $V_5(1/2;1/2;1/2)$ kvadratik operator $\pi_5$ o‘z-o‘zini tekislash bilan mos keladi.

$\pi_6$ o‘z-o‘zini moslashtirishga mos keladigan kvadratik operatorlar quyidagicha ko‘rinishga ega bo’ladi:

$$V_6(\alpha,\beta,\gamma)=$$
$$=\begin{cases} P_{11,1}=0 \quad P_{22,1}=1 \;\; P_{33,1}=0 \;\; P_{12,1}=\alpha \; P_{13,1}=0 \;\; P_{23,1}=\gamma, \\ P_{11,2}=1 \;\; P_{22,2}=0 \;\; P_{33,2}=0 \;\; P_{12,2}=1-\alpha \;\; P_{13,2}=\beta \;\; P_{23,2}=\;0, \\ P_{11,3}=0 \quad P_{22,3}=0 \;\; P_{33,3}=1 \;\; P_{12,3}=0 \; P_{13,3}=1-\beta \;\; P_{23,3}=1-\gamma, \end{cases}$$

bu yerda $0\le\alpha\le1,\;\; 0\le\beta\le1,\;\; 0\le\gamma\le1.$

Mazkur kvadratik operatorlar sinfini uchun (2.2) almashtirishdan quyidagi shaklga ega bo‘lishini ko’rishimiz mumkin:

$$\begin{cases} x_1'=x_2^2+2\,\alpha\,x_1x_2+2\,\gamma\,x_2x_3, \\ x_2'=x_1^2+2\,(1-\alpha)x_1x_2+2\beta x_1x_3, \\ x_3'=x_3^2+2(1-\beta)x_1x_3+2(1-\gamma)x_2x_3, \end{cases}$$

yoki, ancha soddalashtirishlardan so’ng

$$\begin{cases} x_1'=x_2[(2\alpha-1)x_1+1+(2\gamma-1)x_3], \\ x_2'=x_1[(2\beta-1)x_3+(1-2\alpha)x_2+1], \\ x_3'=x_3[1+(1-2\gamma)x_2+(1-2\beta)x_1], \end{cases}$$

$\overline{V_\iota}$ orqali $V_i(\alpha,\beta,\gamma)$ $(i=1,2,\dots,6)$ shakldagi barcha suryektiv bo’lgan kvadratik operatorlar to‘plamlarini belgilaymiz.

**Natija 2.** Istalgan $i\;=\;1,2,\dots,6$ da $\overline{V_\iota}$ ga tegishli kvadratik operatorlarning qavariq chiziqli birikmasi ham $\overline{V_\iota}$ ga tegishli.

**Teorema 4.** Har qanday suryektiv operatori $S^2$ simpleks gomeomorfizmi.

**Isbot.** Uchinchi teoremadan shu kelib chiqadiki, har qanday suryektiv operator $V_i$ $(i = 1,2,\dots,6)$ sinflaridan biriga tegishli bo'ladi. Agar $i = 1$ bo'lsa, u holda bu birinchi natijada isbotlangan. $i \neq 1$ bo'lsin. Sinflaridan birida tegishli bo'lsa, u holda bu gap birinchi natijada allaqachon isbotlanganligini ko'rish mumkin.

**TADQIQOT NATIJALARI**

$V_1(\alpha,\beta,\gamma)$ operatori birinchi natijaga asosan gomeomorfizm bo'lib, $V_1(1/2,1/2,1/2)$ o'zgarishi, o'z-o'zini tekislovchi $\pi_i$, aniqki, gomeomorfizmdir. Xulosa sifatida quyidagi teoremani keltirib o'tamiz. Ikki o'lchovli sodda simpleksda uchinchi teoremaning umumlashmasi hisoblanadi.

**Teorema 5.** Ikki o'lchamli sodda simpleksda aniqlangan kvadratik operator faqat va faqat biyektiv bo'lganda suryektiv kvadratik operator bo'la oladi.

Bu teoremaning isboti ham oldingi teoremalarga o'xshab isbotlanadi.

**MUHOKAMA**

Kvadratik operatorlar va ularning chekka nuqtalarini topish bo'yicha ilmiy tadqiqot ishlari [1-9] maqolada ham olib borilgan. Ushbu maqolalarda va [10-17] ilmiy izlanishlarda bir va ikki o'lchamli simplekslarda berilgan diskret vaqtli va uzluksiz vaqtli kvadratik operatorlar sinfi tasniflangan, qo'zg'almas nuqtalari topilgan. Bundan tashqari, kvadratik operatorlarning syurektiv va ikki tomonlama bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartlar hamda gomeomorfizm bo'lish shartlari keltirilgan va teoremalar sifatida berilib, isbotlangan.

**XULOSA**

Yuqorida bayon qilinganlaridan ko'rinib turibdiki, tadqiqot ishlari olib borilgan mavzu keng amaliy ahamiyatga ega mavzu hisoblanadi. Shu bilan bir qatorda, hozirgi vaqtda mamlakatimizda barcha aniq fanlarni amaliy tatbiqlarini kengaytirishga keng e'tibor berilmoqda [18-20]. Shu munosabat bilan fizik va biologik jarayonlarning matematik modellarini tuzishga [10-17], xususan biologik jarayonlar hisoblanmish turli individlarning populyatsiyasini o'rganishga ahamiyat qaratilgan.

Qayd qilinganidek, matematik modellar asosan diskret va uzluksiz vaqtli kvadratik stoxastik operatorlarga keladi. Uzluksiz vaqtli kvadratik stoxastik operatorlar esa dinamik sistemalar deb ham atalib, ular asosan chiziqli va nochiziqli oddiy va xususiy hosilali differentsial tenglamalar sifatida ifodalanadi [21-28]. Qisqacha qilib aytganda dinamik sistema - bu haqiqiy ob'ektlar, jarayonlar yoki hodisalarning matematik modeli hisoblanib, ma'lum holat tasvirlangan sistema sifatida ifodalanadi. Ular tahlil qilinib [29-34] (tenglama yoki sistemaning yechimining yagonaligi va mavjudligi aniqlanadi, sonli usullar yordamida yechimi topiladi yoki analitik yechimlari izlanadi), uning evolyutsiyasi (tenglamalarning yechimi orqali ular o'zini kelajakda qanday tutishi) o'rganiladi. Odatda bu sistemalar ba'zi qoidalar orqali beriladi. Aynan tez ko'payadigan individlar populyatsiyasi qonuniyati turli matematik modellar orqali ifodalanadi.

**REFERENCES**

1. Мухитдинов Р.Т., Тулаева М.Н. Приложение квадратичных операторов и их крайние точки на симплексе // Journal of new century innovations, 7:5 (2022), стр. 225-241
2. Ганиходжаев Н.Н, Жамилов У.У., Мухитдинов Р.Т. Не эргодические квадратичные операторы двуполой популяции // Украинский математический журнал, том № 65, 2013, с.1152-1160.
3. Мухитдинов Р.Т. Construction of periodic solutions of nonlinear differential equations of second order // Международная научно-практическая конференция «Интеграция современных научных исследований в развитие общества», 28-29 декабря, Россия, 2016, с.127-129.
4. Мухитдинов Р.Т. Комплексный формы представления уравнения идеального твёрдого тела // Международная научно-практическая конференция «Интеграция современных научных исследований в развитие общества», 28-29 декабря, Россия, 2016, с.129-131.
5. Мухитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. Эргодические свойства мер, порожденных одним классом квадратичных операторов // Проблемы науки, 63:4 (2021), с.16-19.
6. Muhitdinov R.T., Do'stova S.B. Gipergeometrik qatorlar haqida ayrim mulohazalar// Science and Education,scientific journal,2:11 (2021), 114-127.
7. Муҳитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. (2021). Гипергеометрик тенглама, унинг ечимлари ва гипергеометрик функциялар ҳақида. Science and Education 2 (11), 128-140.
8. Muxitdinov, R. (2022). О дифференциации обучения в вузах // Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
9. Мухитдинов Р.Т., Абдуллаева М.А. Крайние точки множества квадратичных операторов, определенных на $S^1$ // Scientific progress, 1:2 (2021), p.470-477.
10. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.
11. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) c.27-30.
12. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
13. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
14. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
15. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.
16. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. О некоторых вольтерровских квадратичных стохастических операторах двуполой популяции с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) c.23-26.
17. Расулов Х.Р. и др. О разрешимости задачи Коши для вырождающегосся квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ученый XXI века. 53:6-1, 2019, c.16-18.

18. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
19. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
20. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
21. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
22. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
23. Rasulov, R. X. R. (2022). Ikkita buzilish chizig'iga ega giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasi haqida. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
24. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
25. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
26. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
27. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
28. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
29. Rasulov H. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Центр научных публикаций (buxdu. uz) 5:5 (2021).
30. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type // Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
31. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
32. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.
33. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
34. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.