INTEGRAL TUSHUNCHASI, KELIB CHIQISH TARIXI VA AYRIM QARSHI MISOLLAR

Abdujobborov Alisher Abdulxay o'g'li
Namangan muhandislik-qurilish instituti
Tillaboev Yodgorjon Kenjaboevich
Namangan muhandislik-qurilish instituti
https://doi.org/10.5281/zenodo.7064035

Annotatsiya. *Maqolada integral tushunchasi va uning kelib chiqish tarixi haqida batafsil ma'lumotlar keltirilgan. Maktab dasturida o'tiladigan Riman integralidan tashqari boshqa bir qator integrallar (Riman-Stiltes, Daniell, Alfred Haar, Henstock-Kurzveil, Ito va Stratonovich, Chokvet) bayon qilingan. Integrallarning bir-biridan farqi aniq misollar yordamida tushuntirilgan. Aniq integral tushunchasi va uni amaliy masalalarda qo'llanilishi keng yoritilib, ayrim teoremalarga doir qarshi misollar taqdim qilingan.*

Kalit so'zlar: *cheksiz kichik, maydon, qattiq jismning hajmi, integral, aniqmas integral, yuza, sirt integrali, aniqmas integral belgisi.*

ПОНЯТИЕ ИНТЕГРАЛА, ИСТОРИЯ ПРОИСХОЖДЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ КОНТРПРИМЕРЫ

Аннотация. *В статье представлена подробная информация о понятии интеграла и истории его возникновения. Помимо интеграла Римана, который рассматривается в школьной программе, описан ряд других интегралов (Римана-Стилтеса, Даниэля, Альфреда Хаара, Хенстока-Курцвейла, Ито и Стратоновича, Чоквета). Различие между интегралами поясняется с помощью конкретных примеров. Широко освещается понятие определенного интеграла и его применение в практических задачах, приводятся контрпримеры для некоторых теорем.*

Ключевые слова: *бесконечно малая, площадь, объем тела, интеграл, неопределенный интеграл, поверхность, поверхностный интеграл, символ неопределенного интеграла.*

ON THE CONCEPT OF INTEGRAL, HISTORY OF ORIGIN AND SOME COUNTER-EXAMPLES

Abstract. *In the article is given information about the integral concept and the history of its origin. In addition to the Riemann integral, which is covered in the school program, a number of other integrals (Riemann-Stiltes, Daniell, Alfred Haar, Henstock-Kurzweil, Ito and Stratonovich, Chokvet) are described. The difference between integrals is explained with the help of specific examples. The concept of definite integral and its use in practical problems were explained in detail, counter-examples of some theorems were presented.*

Keywords: *infinitesimal, area, volume of a solid, integral, indefinite integral, surface, surface integral, sign of indefinite integral, counter derivative.*

KIRISH

Matematikada integral cheksiz kichik ma'lumotlarni birlashtirish natijasida yuzaga keladigan siljish, maydon, hajm va boshqa tushunchalarni tavsiflaydigan tarzda funksiyalarning qiymatlarini aniqlab beradi. Integrallarni topish jarayoni integrallash deb ataladi. Differensiallash bilan bir qatorda, integrallash ham matematikaning asosiy, muhim tushunchalaridan bo'lib, matematika va fizikada ixtiyoriy shaklning maydoni, egri chiziq uzunligi va qattiq jismning hajmini o’z ichiga olgan muammolarni hal qilish uchun vosita bo'lib xizmat qiladi. Integrallar ikki asosiy tipga ajratilib, ular aniq integrallar va aniqmas integrallar deb yuritiladi. Aniq integrallar biror funksiya grafigi bilan chegaralangan egri chiziqning tekislikda ikki nuqtasi maydon sifatida talqin qilinadi. Bunda, tekislikning gorizontal o’qining yuqori qismi yuzasi musbat, pastki qismidagi yuzalar esa manfiy hisoblanadi. Aniqmas integrallar, esa berilgan funksiyaga qarshi hosila tushunchasini ham anglatadi. Integrallarni hisoblashning asosiy usullar, albatta aniq integrallarni differensiallash bilan bog’liq bo’lib, funksiyaning hosilasi ma’lum bo’lganda, uning aniq integralini hisoblash bir qadar osonlashadi va shu asnoda qoidalar yuzaga keladi.

Maydonlar va hajmlarni hisoblash usullari qadimgi yunon matematikasidan kelib chiqqan bo’lsa-da, integrallash usullari va tamoyillari 17-asr oxirida Isaak Nyuton va Gotfrid Vilgelm Leybnits tomonidan alohida mustaqil ravishda ishlab chiqilgan bo’lib, ular egri chiziqning ostidagi maydonni cheksiz kichik kenglikdagi to’rtburchaklarning cheksiz yig’indisi deb hisoblaganlar. Keyinchalik Bernard Riman integrallarning qat’iy ta’rifini beradi. Riman hosil bo’lgan yuzani yupqa vertikal ustunlarlarga bo’lish orqali egri chiziqli yuzaning maydoniga yaqinlashuvchi limit qiymatiga asoslanadi.

TADQIQOT MATERIALLARI VA METODOLOGIYASI

Integrallar funksiya turiga, shuningdek, integrallash amalga oshiriladigan sohaga qarab, yanada umumlashtirilishi mumkin. Misol uchun, ikki yoki undan ortiq o’zgaruvchilarning funksiyalari uchun chiziqli integrali aniqlanadi va integrallash oralig’i oraliqning ikkita oxirgi nuqtasini bog’laydigan egri chiziqning formula ko’rinishi bilan almashtiriladi. Sirt integrallarida esa egri chiziq uch o’lchamli fazoda sirtning bir qismi bilan almashtirilib hisoblab topiladi.

Integrallarni hisoblashga qodir bo’lgan birinchi hujjatlashtirilgan texnika bu qadimgi yunon astronomi Yevdoksning (taxminan miloddan avvalgi 370-yil) charchash usuli bo'lib, u maydonlar va hajmlarni cheksiz ko'p bo’linishlarga bo’lish orqali topishga harakat qilgani ma’lum. Bu usul miloddan avvalgi 3-asrda Arximed tomonidan yanada kengroq o’rganib ishlab chiqilgan va qo’llanilgan bo‘lib, aylananing maydonini, sharning sirtini va hajmini, ellipsning maydonini, parabolaning ostki qismidagi maydonni, segmentning hajmini hisoblashda foydalanilgan. Ya’ni bu davrda integrallar inqilobi yuzaga kelgan desak, adashmaymiz.

Bundan tashqari, shunga o’xshash usul Xitoyda eramizning 3-asrida Lyu Xuy tomonidan ishlab chiqilgan bo’lib, u aylana maydonini topishda foydalangan. Bu usul keyinchalik 5-asrda xitoylik ota-bola matematiklar Zu Chongji va Zu Geng tomonidan sharning hajmini topishda qo‘llanilgan.

Yaqin Sharqda esa Lotin mamlakatlarida Alhazen nomi bilan tanilgan inson (taxminan 965 - milodiy 1040 y.) Hasan Ibn al-Haysam to'rtinchi darajalar yig'indisi formulasini ishlab chiqdi. U bu natijalardan endi funksiya integrali deb ataladigan tushunchani hisoblash (yaratish) uchun foydalandi, uning bu usulida integral kvadratlar va to’rtinchi darajalar yig’indisi formulalari yordamida paraboloid hajmini hisoblash imkonini qo’lga kiritdi.

Integral hisobdagi keyingi muhim yutuqlar 17-asrlargacha paydo bo’la boshladi. Bu vaqtda Kavalyerining «Bo‘linmaslar metodi bilan» asari va Fermatning bir qancha asarlari zamonaviy hisob-kitoblarga asos sola boshladi, Kavalyeri o’zining kvadratura formulasida $n = 9$ darajagacha bo’lgan x^n integrallarini hisoblab chiqdi. Keyingi qadamlar XVII asrning boshlarida Barrou va Torrichelli tomonidan amalga oshirildi, ular integrallash va differensiallash amallari o'rtasidagi bog'liqlik haqida dastlabki fikrlarni ilgari surdilar. Barrou integral hisobning asosiy teoremasining birinchi isbotini keltiradi. Uollis Kavalyeri usulini umumlashtirib, x ning integrallarini umumiy darajaga, jumladan, manfiy darajalar va kasr darajalarini hisoblab chiqadi.

Integrallarni hisoblashdagi eng katta muvaffaqiyat XVII asrda Leybnits va Nyuton tomonidan integral hisobning asosiy teoremasini mustaqil ravishda bir-birlaridan bexabar holda kashf etishlari bilan yuz berdi. Ular integrallash va differensiallanish o'rtasidagi bog'liqlikni ko'rsatadi. Ushbu bog'liqlik, differensiallashning qiyosiy qulayligi bilan birgalikda integrallarni hisoblash uchun ishlatilishi ham mumkin edi. Xususan, hisob-kitoblarning asosiy teoremasi ancha kengroq sinfdagi muammolarni hal qilishga imkon beradi. Leybnits va Nyuton tomonidan ishlab chiqilgan keng qamrovli matematik tizimning ahamiyati bir xil edi. U uzluksiz sohalar ichidagi funksiyalarni aniq tahlil qilish imkonini berdi. Oxir oqibat, bu usul zamonaviy hisob-kitob asosiga aylandi va bu hisob-kitoblar to'g'ridan-to'g'ri Leybnitsning asarlaridan olingan.

Nyuton va Leybnits integrallash amaliga tizimli yondashishni ta'minlagan bo'lsalarda, ularning ishlarida ma'lum bir darajada qat'iylik yo'q edi va o'z davrining ba'zi matematiklari bu hisob-kitoblarni umumiy emas deb bilishadi. Hisoblash chegaralarni ishlab chiqish bilan mustahkamroq natijaga erishish mumkin edi. Integrallash amali birinchi marta Riman tomonidan aniq chegaralar yordamida qat'iy qonunlar yaratilda va rasman tan olindi. Garchi barcha chegaralangan bo'lakli uzluksiz funksiyalar chegaralangan oraliqda Riman integrallanishi mumkin bo'lsada, keyinchalik Rimanning ta'rifi qo'llanilmaydigan umumiyroq funksiyalar, ayniqsa Furyening analiz tushunchalarida ko'rib chiqildi va Lebeg integralning o'lchov asosidagi boshqa ta'rifini ishlab chiqdi. Lebeg tomonidan kiritilgan nazariya haqiqiy tahlilning kichik sohasi edi, xolos. Keyinchalik, Riman Lebeg yondashuvlarini kengaytiruvchi integralning boshqa ta'riflari taklif qildi. Haqiqiy sanoq tizimiga asoslangan bu yondashuvlar bugungi kunda eng keng tarqalgan bo'lib, hozirda bir qancha muqobil yondashuvlar ham mavjud.

Integral belgisi tarixi haqida. Aniqmas integralning bugungi ko'rinishdagi belgisi 1675 yilda Gotfrid Vilgelm Leybnits tomonidan kiritilgan bo'lib, u

$$\int$$

integral belgisini yig'indi (summa) ni bildiruvchi $\int$ (uzun s) harfiga (summa deb yozilgan; lotincha «sum» yoki «jami») moslashtirilib kiritilgan. Integral belgisi ustida va ostida chegaralari bo'lgan aniq integralning zamonaviy yozuvi birinchi marta Jozef Furye tomonidan 1819–20-yillarda Fransiya akademiyasining a'zolari orasida qo'llanilgan va o'zining 1822 yil kitobida qayta nashr etilgan.

Isaak Nyuton integrallash amalini ko'rsatish uchun o'zgaruvchining ustidagi kichik vertikal chiziqdan foydalangan yoki o'zgaruvchini katak ichiga joylashtirgan. Vertikal chiziq bilan osongina chalkashib ketishdi, $\dot{x}$ va x' bu differensialni ko'rsatish uchun ishlatiladi va bu yozuv bosib chiqaruvchilar uchun qiyin edi, shuning uchun bu belgilar keng qo'llanilmadi.

TADQIQOT NATIJALARI

Integral atamasining birinchi marta qo'llanilishi. Bu atama birinchi marta lotin tilida 1690 yilda Jakob Bernulli tomonidan nashr etilgan asarda qo'llaniladi.

Atamalar va belgilar: umuman olganda, $[a, b]$ oraliqdagi x haqiqiy o'zgaruvchiga nisbatan $f(x)$ haqiqy qiymatli funksiyaning integrali quyidagicha yoziladi.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Integral belgisi $\int$ integrallash amalini ifodalaydi. x o'zgaruvchining differensiali deb ataladigan dx belgisi integral o’zgaruvchisi x ekanligini ko’rsatadi. $f(x)$ funksiya integrallanuvchi funksiya, a va b nuqtalar integrallash chegarasi (yoki shunchaki integral chegarasi). Funksiyaning o’z aniqlanish sohasidagi integrali chekli bo’lsa, integrallanadigan funksiya deyiladi. Agar chegaralar mavjud bo’lsa yoki aniqlansa, integral aniq integral deyiladi.

$\int f(x)dx$ integral aniqmas integral deb ataladi, u hosilasi integral bo’lgan funksiyalar sinfini (qarshi hosilani) ifodalaydi, desak bo’ladi. Hisoblashning asosiy teoremasi aniq integrallarni aniqmas integrallarga bog’lashni baholaydi. Uzluksiz sohalarda va yoki bir nechta o’lchamlarda integralni qamrab olish uchun integral belgilarining bir nechta kengaytmalari mavjud.

Integrallar ko’pgina amaliy vaziyatlarda yuzaga keladi. Masalan, tubi tekis bo’lgan to’rtburchaklar shaklidagi suzish havzasining uzunligi, eni va chuqurligidan undagi suv hajmini, sirtining maydonini va atrofining uzunligini aniqlash mumkin. Ammo agar u yumaloq tubi bilan oval bo’lsa, bu miqdorlar uchun aniq va qat’iy qiymatlarni topish uchun integrallar talab qilinadi. Har bir holatda, qidirilayotgan miqdorni cheksiz ko’p cheksiz kichik bo’lakchalarga bo’lish mumkin, so’ngra aniq yaqinlashishga erishish uchun bo’laklarni yig’ish orqali natijaga erishish mumkin.

Integral belgisini rasmiy belgilashning ko’pgina usullari mavjud, ularning hammasi ham bir xil yoki ekvivalent emas. Farqlar, asosan, boshqa ta’riflar ostida birlashtirilishi mumkin bo’lmagan, balki ba’zan pedagogik sabablarga ko’ra turli xil maxsus holatlar bilan shug’ullanish uchungina mavjud. Eng ko’p qo’llaniladigan ta’riflar Riman va Lebeg integrallaridir.

Riman integrali. Riman-Darbu va Lebeg integrali. Integral ostidagi chegaraga o’tish ko’pincha nazariy jihatdan ham, amaliy jihatdan ham qiziqish uyg’otadi. Masalan, ko’pincha tegishli ma’noda muammoning yechimiga yaqin bo’lgan funksiyalar ketma-ketligi tuzilishi mumkin. U holda yechim funksiyasining integrali yaqinlashishlar integrallarining limiti bo’lishi kerak. Biroq, chegara sifatida olinishi mumkin bo’lgan ko’plab funksiyalar - limit teoremalari Riman integrali bilan bajarilmaydi. Shu sababli, integralning kengroq sinfini integrallash imkonini beruvchi ta’rifga ega bo’lish katta ahamiyatga ega.

Bunday integral Lebeg integralidir, u integrallanuvchi funksiyalar sinfini kengaytirish uchun quyidagi faktdan foydalanadi: agar funksiya qiymatlari soha bo’yicha qayta tartiblangan bo’lsa, funksiyaning integrali bir xil bo’lib qolishi kerak. Shunday qilib, Anri Lebeg o’z nomi bilan atalgan integralni kiritdi va bu integralni Pol Montelga yozgan maktubida shunday tushuntiradi: Men cho‘ntagimga yig‘ib olgan ma’lum summani to‘lashim kerak. Men cho‘ntagimdan pul va tangalarni olib, jami summaga yetgunimcha topilgan tartibda kreditorga beraman. Bu Riman integrali. Lekin men boshqacha davom etishim mumkin. Men cho’ntagimdagi barcha pullarni olib tashlaganimdan so’ng, men bir xil qiymatdagi pul va tangalarga buyurtma beraman, keyin esa bir qancha pul va tangalarimni birin-ketin kreditorga to’layman. Bu mening integralim. Shunday qilib, Lebeg integralining ta’rifi m o’lchov bilan boshlanadi. Eng oddiy holatda, $A = [a, b]$ oraliqning $m(A)$ Lebeg o’lchovi, uning kengligi $b - a$ bo’ladi, shuning uchun ikkalasi ham mavjud bo’lganda Lebeg integrali (to’g’ri) Riman integraliga mos keladi. Murakkab holatlarda qaralayotgan to'plamlar uzluksiz va intervallarga o'xshash bo'lmagan holda bo'laklarga bo'linishi mumkin.

Boshqa integrallar. Riman va Lebeg integrallari integralning eng ko'p qo'llaniladigan ta'riflari bo'lsada, bir qator boshqa ta'riflar ham mavjud. Jumladan, bunga Darbu integrali misol bo'ladi.

Darbu integrali. Darbu yig'indisi (Riman yig'indisining bir qismi) bilan aniqlangan, lekin Riman integraliga ekvivalent bo'ladi, ya'ni funksiya Riman integrallanishi mumkin bo'lgan taqdirdagina Darbu integrallanishi mumkin. Darbu integrallari Riman integrallariga qaraganda osonroq aniqlanish afzalliklarga ega.

Riman-Stiltes integrali. Riman integralining kengaytmasi, o'zgaruvchini funksiyaga nisbatan integrallash.

Iogan Radon tomonidan ishlab chiqilgan Lebeg-Stiltes integrali Riman-Stiltes va Lebeg integrallarini umumlashtiradi.

Daniell integrali. O'lchovlarga bog'liq bo'lmagan Lebeg integrali va Lebeg-Stiltes integralini o'z ichiga oladi.

Alfred Haar integrali. 1933 yilda Alfred Haar tomonidan kiritilgan mahalliy ixcham topologik guruhlarga integrallash amalini bajarish uchun ishlatiladi.

Henstock-Kurzveil integrali. Arnaud Denjoy, Oskar Perron va (o'lchov integrali sifatida eng aniqrog'i) Yaroslav Kurzveyl tomonidan turlicha ta'riflangan va Ralf Xenstok tomonidan ishlab chiqilgan.

Ito integrali va Stratonovich integrali. Ular Braun harakati kabi yarim martingallarga nisbatan integrallash amalini kiritadilar.

Chokvet integrali. 1953 yilda fransuz matematigi Gustav Chokvet tomonidan yaratilgan subadditiv yoki superadditiv integral.

MUHOKAMA

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari. Biz $F(x)$ funksiyaning $F'(x)$ hosilasini topish zarur bo'lsa, funksiyalarni differensiallash qoidalaridan foydalanganmiz. Agar hosila x argumentning funksiyasi bo'lib, uni $f(x)$ orqali belgilasak, $F'(x) = f(x)$ bo'ladi va $F(x)$ funksiya differensialini $dF(x) = F'(x)dx$ yoki $F(x) = f(x)dx$ ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi. Aksincha funksiyaning biror X oraliqda berilgan $f(x)$ hosilasi bo'yicha shu oraliqda aniqlangan $F(x)$ funksiyaning o'zini topish talab qilinsa, $f(x)$ funksiyani integrallash amalidan, ya'ni integrallash nomi bilan ataluvchi maxsus qoidalar va formulalardan foydalaniladi. Izlanayotgan $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya vazifasini o'taydi.

Yuqorida aytib o'tilganidek, matematikada integral atamasini shvetsariyalik matematik Iogann Bernulli (1667-1748) kiritgan va integral hisobdan birinchi sistematik kurs tayyorlagan. Uning shogirdi Peterburg fanlar akademiyasining haqiqiy a'zosi Leonard Eyler (1707-1783) integrallashni $\int f(x)dx$ belgisi orqali belgilagan. Hozirgi zamon belgilashlarini esa fransuz matematigi I.Fur'e (1768-1860) kiritgan.

Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalari $(a,b) \subset R$ intervalda (bu interval chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin) berilgan bo'lib, $F(x)$ funksiya shu $(a,b) \subset R$ da differensiallanuvchi bo'lsin.

Ta'rif 1. Agar (a,b) oraliqda $F'(x)=f(x)$ $(x\in(a,b))$ bo'lsa, (a,b) da $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Aytaylik, $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalari $[a,b]$ segmentda berilgan bo'lib, $F(x)$ funksiya shu $[a,b]$ segmentda differensiallanuvchi bo'lsin.

Ta'rif 2. Agar (a,b) oraliqda $F'(x)=f(x)$ $(x\in(a,b))$ bo'lib, a va b nuqtalarda esa $F'(a+0)=f(a)$, $F'(b-0)=f(b)$ tengliklar o'rinli bo'lsa, $[a,b]$ segmentda $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Teorema 1. Agar $f(x)\in C(a,b)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) da boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.

Teorema 2. Funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiyaning ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ uchun

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) = F(b) - F(a)$$

formula o'rinlidir.

Odatda bu formula Nyuton- Leybnits formulasi deyiladi.

Differensiallash va integrallash tushunchalari matematika va uning tatbiqlarida muhim rol o'ynaydi. Matematik analizning differensiallash tushunchasidan bir qancha masalalarni, jumladan harakat qununiga ko'ra nuqta harakatining oniy tezligini topishda, egri chiziq ma'lum bo'lgan holda unga urinma o'tkazish masalalarini hal etishda foydalaniladi.

Ko'p hollarda harakatdagi nuqtaning momentdagi tezligi ma'lum bo'lganda harakat qonunini topish, egri chiziq urinmasiga ko'ra o'zini aniqlash masalalari yuzaga keladi. Bu holda funksiyaning hosilasiga ko'ra o'zini topish lozim bo'ladi. Bu yuoqrida eslatib o'tilgan masalalarga teskari bo'lib, ular funksiyalarni integrallash amali yordamida yechiladi.

Demak, funksiyalarni differensiallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallar bo'ladi.

Aniq integral tushunchasi. <u>Segmentni bo'laklash.</u> Biror $[a,b]\subset R$ segment berilgan bo'lsin. Bu segmentning quyidagi $a=x_0<x_1<x_2<...x_{n-1}<x_n=b$ munosabatda bo'lgan

$$x_0,\ x_1,\ x_2,...x_{n-1},\ x_n \qquad (1)$$

nuqtalar to'plamini olaylik. Ravshanki, (1) to'plam $[a,b]$ segmentni $B_1=[x_0,x_1]$, $B_2=[x_1,x_2]$, ... , $B_n=[x_{n-1},x_n]$ bo'laklarga ajratadi.

1-Ta'rif. Ushbu $a=x_0<x_1<x_2<...x_{n-1}<x_n=b$ munosabatda bo'lgan $x_0,\ x_1,\ x_2,...x_{n-1},\ x_n$ nuqtalar to'plami $[a,b]$ segmentni bo'laklash deyiladi va $P=\{x_0,\ x_1,\ x_2,...x_{n-1},\ x_n\}$ kabi belgilanadi.

Bunda har bir x_k $(k=0,1,2,...,n)$ nuqta $[a,b]$ segmentning bo'luvchi nuqtasi, $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,2,...,n-1)$ segment esa P bo'laklashning oralig'i deyiladi. Quyidagi $\lambda_p=\max\{\Delta x_k\}$, $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ miqdor P bo'laklashning diametri deyiladi.

Darbu hamda integral yig'indilar. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. Unda $\exists m \in R$, $\exists M \in R$, $\forall x \in [a,b]$: $m \le f(x) \le M$ bo'ladi.

Aytaylik, $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$ $[a,b]$ segmentning biror bo'laklashi bo'lsin. U holda bu bo'laklashning har bir $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2, ..., n-1)$ oralig'ida

$m_k = \inf\{f(x)\}$, $x \in [x_k\ x_{k+1}]$,
$M_k = \sup\{f(x)\}$, $x \in [x_k\ x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2, ..., n-1)$ mavjud bo'lib,

$$\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \le m_k \le M_k \le \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \qquad (2)$$

bo'ladi.

2-Ta'rif. Quyidagi $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k$ yig'indi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentning P bo'laklashiga nisbatan integral yig'indisi deyiladi.

3-Ta'rif. Agar $\lambda_P \to 0$ da $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi $\sigma(f;P;\xi_k)$ chekli J limitga ega bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda integrallanuvchi (Riman ma'nosida integrallanuvchi) deyiladi, J soniga esa $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segment bo'yicha aniq integrali deyiladi. Uni $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi. Demak, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$.

Uzluksiz funksiyalarning integrallanuvchiligi. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

Teorema 3. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'lsa, u shu $[a,b]$ da integrallanuvchi, ya'ni $C[a,b] \subset R([a,b])$ bo'ladi.

Qarshi misol. Funksiya berilgan yopiq oraliqda aniqlangan va chegaralangan, ammo bu oraliqda Riman integrali mavjud emas. Yopiq [0; 1] oraliqda ratsional sonlar to'plamining chegaralangan xarakteristik funksiyasi– Dirixle funksiyasi bu segmentda Riman ma'nosida integrallanmaydi.

Integral hisobning asosiy teoremasiga ko'ra, agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya berilgan oraliqda $F(x)$ boshlang'ich funksiyaga ega deyiladi, ya'ni bunda $x \in [a,b]$ da $F'(x) = f(x)$ tenglik o'rinli va $f(x)$ funksiya uchun bu oraliqda $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Xuddi shu teoremani quyidagicha aytsa ham bo'ladi, ya'ni agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya berilgan oraliqda ham integrallanuvchi ham boshlang'ich funksiyaga ega deyiladi.

Misol. $[-1,1]$ oraliqda berilgan $y = sgnx$ funksiyasi. Funksiya berilgan oraliqda integrallanadi, ammo bu oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega emas.

Aksincha, ya'ni funksiya berilgan oraliqda boshlang'ich funksiyaga ega, ammo bu oraliqda Riman ma'nosida integrallanmaydigan funksiyalar. Misol, $f(x) = x^2 sin\frac{1}{x}$ funksiya shu kabi misollar qatoriga kiradi.

Teorema 4. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda chegaralangan va monoton bo'lsa, u shu segmentda integrallanuvchi bo'ladi.

Teorema 5. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda chegaralangan va shu segmentning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'ladi.

XULOSA

Aniq integral matematika, fizika, kimyo va biologiya fanlarida keng tadbiqlarga ega. Bunga misol qilib [1-15] ilmiy izlanishlarni keltirishimiz mumkin. Mazkur maqolalarda quruvchi-muhandislar uchun qurilish ishlarida kuchlarni hisoblash, elektr tizimlarida graflar nazariyasida amalga oshiriladigan amallarni bajarishda hamda chiziqli va chiziqsiz xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda integrallarning qo'llanilishi keng yoritilgan.

Amaliyot shuni ko'rsatadiki, o'quvchilar yoki talabalarga yangi mavzularni o'tishda tarixiy misollar haqida so'zlab berish [16-20], isbotlanayotgan teoremalarga nisbatan qarshi misollar keltirish [21-28] hamda integrallar keng qo'llanilgan ilmiy ishlarni [29-38] o'rganishni tavsiya qilish samaraliroq natijalar beradi.

REFERENCES

1. Tillaboev Y., Daminov J. A., Najmiddinov I. The Effect of the Number of Rotor Plates on the Vertical Axis on the Value of the Moment of Inertia // Design Engineering, 2021, ISSUE 09. Pages:5504-5509.
2. Daminov J.A., Tillaboev Y.., Agzamov K.S., Isaboev S.M., Abdujabborov A.A. The Mechanism of Experimental Determination of the Angular Velocity of the Working Shaft of the Wind Unit // Design Engineering, 2021, том 9. Pages:11814 – 11821.
3. Тиллабоев Е.К., Дадамирзаев М.Г., Абдулхафизов Б.Х. (2015). Об одном из методов решения уравнения Навье-Стокса // Молодой ученый. Том 86, № 6, стр 7-12.
4. Тиллабоев Е.К., Хакимов Р.М., Холмирзаев И.А. (2015). Организация приближённого решения уравнений состояния электрической цепи в MathCAD // Молодой ученый. Том 89, № 9, стр 44-48.
5. Tillaboev Y.K. Domino Interactive In Theoretical Mechanics Lectures Apply The Method // Innovative Technologica: Methodical Research Journal. 2021, Vol 2, № 07, p.43-48.
6. Тиллабоев Е.К., Холмирзаев И.А. Определение базисных контуров с помощью графа в электрических системах // Теория и практика современной науки. 2016, 7(13), с. 315-318.
7. Тиллабоев Ё.К. О возможностью mathcad при решения контурных уравнений электрической цепи // Теория и практика современной науки. 2016, № 6-2 (12), с. 219-224.
8. Dehqonov U., Tillaboev Y. Rotors Of Wind Aggregates and Their Construction Problems // International Journal of Progressive Sciences and Technologies, 2021, Vol 27, № 1. p.148-154.
9. Тиллабоев Е.К. Последовательности точек в m-мерном Евклидовом пространстве // Science and Education, scientific journal, 3:2 (2022), c.28-37.
10. Тиллабоев Е.К. О преподовании непрерывности функции многих переменных с помощью интерактивных методов // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), c.1053-1062.

11. Dekhkonov Ulugbek, Tillaboev Yodgor,Orishov Utkirbek. Determining the Optimal Angular Velocity of a Vertical Axis Rotor Wind Unit. Jundishapur Journal of Microbiology 15 (No.1), 3298-3302.
12. Mahmudov Z.S., Isaboev Sh.M., Abdujabborov A.A., Rakhmatillaev Y.N. Use of Modern Methods of Assessing Students' Knowledge // Undishapur Journal of Microbiology, 15:1 (2022), p. 3280-3286.
13. Деҳқонов У.Ғ., Исабоев Ш. М., Абдужабборов А.А. Шамол агрегати фойдали қаршилик моментининг зарурий қиймати // Journal of Advanced Research and Stability, “Academic Excellence on Science and Research”, Special Issue, 2022, p. 216-222.
14. Даминов, Ж. (2022). Некоторые методические советы по вычисление пределов функций многих переменных. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 12(12).
15. Абдужобборов, А. (2022). Ortogonal funksiyalar va qo’pxadlar mavzusini o’qitishga doir metodik tavsiyalar: Ortogonal funksiyalar va qo’pxadlar mavzusini o’qitishga doir metodik tavsiyalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 12(12).
16. Z. Mahmudov Z. S., Daminov J. A., Rahimov A. M. The Use Of Cluster Method In Lectures On Theoretical Mechanics // International Journal of Progressive Sciences and Technologies (IJPSAT). 2018, Vol. 27, p.145-147.
17. Yuldashev S. S., Boytemirov M. Influence of the level of the location of the railway canvas on the propagation of waves from train motion // ISJ Theoretical & Applied Science. – 2020. – №. 05 (85). с. 140.
18. Юлдашев Ш. С. и др. Влияние высоты расположения железнодорожного полотна на уровень колебания грунта, возникающего при движении поездов // Научное знание современности. – 2018. – №. 10. – С. 55-57.
19. Юлдашев Ш. С., Карабаева М. У. Прогнозирование уровня вибрации в грунтах, распространяющейся от тоннелей метрополитена круглого сечения // Молодой ученый. – 2016. – №. 6. – С. 249-253.
20. Gafurovich D. U., Sotivoldievich Z. M. The use of non-conventional power sources is a requirement of the period //Academicia Globe: Inderscience Research. – 2021. – Т. 2. – №. 07. – С. 121-126.
21. Ulugbek D., Yodgorjon T. Rotors Of Wind Aggregates and Their Construction Problems // International Journal of Progressive Sciences and Technologies. – 2021, V. 27. №1. p. 148-154.
22. Abdivalievich D. J. Increasing student activity in lectures on the subject of structural mechanics // Innovative Technologica: Methodical Research Journal. 2021, v. 2. № 07. p. 38-42.
23. Mirsaidov M., Boytemirov M., Yuldashev F. Estimation of the Vibration Waves Level at Different Distances // Proceedings of FORM 2021. – Springer, Cham, 2022. – С. 207-215.
24. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig’iga ega bo’lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo’yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
25. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
26. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.

27. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
28. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
29. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
30. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
31. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
32. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
33. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
34. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
35. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
36. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
37. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
38. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).
39. Х.Р Расулов, Ф.М. Джуракулова (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида // Scientific progress. 2:1, 455-462 бетлар.
40. Rasulov, R. X. R. (2022). Analysis of Some Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with Two Lines of Degeneracy. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).