ГЕНЕТИК АЛГЕБРАДА МАЖОРИЗАЦИЯНИ ҚЎЛЛАШ

Мўминов Улуғбек Рахимжонович
Фарғона давлат университети Докторанти
Икромова Наргиза Сайидакбаровна
Фарғона давлат университети Ўқитувчиси

https://doi.org/10.5281/zenodo.7064007

Аннотация. *Бир ўлчовли симплексда квадратик операторни мажоризацияга тадбиқи ҳамда генетик алгебранинг қисмалгебраси келтирилган.*

Калит сўзлар: *генетик алгебра, стохастик матрица, бир ўлчовли қисмалгебра, квадратик оператор.*

ПРИМЕНЕНИЕ МАЖОРИЗАЦИИ В ГЕНЕТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЕ

Аннотация. *Даны приложения квадратичного оператора к мажоризация в одномерном симплексе и частичной алгебре генетической алгебры.*

Ключевые слова: *генетическая алгебра, стохастическая матрица, одномерной подалгеброй, квадратичный оператор.*

APPLICATION OF MAJORIZATION IN GENETIC ALGEBRA

Abstract. *Applications of the quadratic operator to majorization in the one-dimensional simplex and in the partial algebra of genetic algebra are given.*

Keywords: *genetic algebra, stochastic matrix, unidimensional subalgebra, quadratic operator.*

ВВЕДЕНИЕ

Концепция мажоризации является одной из основных концепций этой научной теории, и мы широко используем концепцию мажоризации для достижения лучших результатов в наших научных исследованиях.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Определение1. $[3]$ Пусть $x, y \in R^2$. Говорят, что x мажорируется y (или y мажорирует x), и пишут $x \prec y$, если

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \le \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}, \ k = 1, \dots, n-1, \\ &\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} \le \sum_{i=1}^{n} y_{[i]} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Определение2. $[1]$ Квадратная матрица P называется стохастической, если все ее элементы неотрицательные и сумма элементов каждой строки равна 1.

В популяционный генетике часто точки симплекса

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \ge 0 \right\} \subset R^n$$

рассматривается как состояние некоторой биологической системы. Пусть набор чисел $\left\{P_{ij,k}\right\}, i, j, k = \overline{1, n}$ удовлетворяют условиям

$$P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Тогда эволюционный оператор $V: S^{n-1} \to S^{n-1}$ определяет закон эволюции системы по формулам

$$x_k^{'} = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j, k = \overline{1,n},$$

где $V(x) = \left(x_1^{'}, \ldots, x_m^{'}\right)$, т.е., если $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$ данное состояние системы, то $V(x) = \left(x_1^{'}, \ldots, x_m^{'}\right)$ следующее состояние системы. Очевидно, равенство

$$x \circ y = \frac{1}{4}\left(V(x+y) - V(x-y)\right) \qquad (4)$$

или

$$x \circ y = \left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,1} x_i y_j ; \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,2} x_i y_j ; \ldots \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,n} x_i y_j \right) \qquad (5)$$

определяет закон умножения $[1]$.

Определение3. $[2]$ R^n, с введенной в нем операцией умножения определенной равенством (4) или (5) при помощи структурных коэффициентов $\left\{P_{ij,k}\right\}$ называется генетической алгеброй.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Следовательно, получаем генетическую алгебру. Очевидно, генетические алгебры в силу симметрии $P_{ij,k} = P_{ji,k}$, $k = \overline{1,n}$ являются коммутативным. Представляет интерес нахождения условий при которых генетическая алгебра является ассоциативной, альтернативной и т.д.

Известно, что $(x, 1-x), (y, 1-y) \in S^1$ для точек $(x, 1-x) \prec (y, 1-y)$ соотношение $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $x \leq y \leq 1-x$ справедливо при выполнении условий.

$V: S^1 \to S^1$оператор (x, y)точка в (x', y') точка

$$\begin{cases} x' = P_{11,1}x^2 + 2P_{12,1}xy + P_{22,1}y^2 \\ y' = P_{11,2}x^2 + 2P_{12,2}xy + P_{22,2}y^2 \end{cases} \qquad (2)$$

переведут на условиях. Этот оператор называется квадратичным оператором.
Эти отношения

$$x \leq P_{11,k}x^2 + 2P_{12,k}xy + P_{22,k}y^2 \leq y, \quad k = 1,2$$

условие$(x', y') \prec (x, y)$ выполнено.

ОБСУЖДЕНИЕ

Теорема1. Если матрица $P=\left(P_{ij,k}\right)_{i,j,k=1,2}$ является стохастической матрицей, то $Vx\prec x$ выполняется для любого $x\in S^1$.

Доказательство. Предположим, что матрица $P=\left(P_{ij,k}\right)_{i,j,k=1,2}$ является стохастической матрицей.

Мы используем следующий оператор:

$$(Vx)_k^{'}=P_{11,k}x_1^2+2P_{12,k}x_1x_2+P_{22,k}x_2^2, \qquad k=1,2.$$

Учитывая, что $x_1+x_2=1$, $x_2=1-x_1$ по условию симплекса:

$$(Vx)_k^{'}=P_{11,k}x_1^2+2P_{12,k}x_1(1-x_1)+P_{22,k}(1-x_1)^2=$$
$$=\left(P_{11,k}-2P_{12,k}+P_{22,k}\right)x_1^2+2\left(P_{12,k}-P_{22,k}\right)x_1+P_{22,k}, \qquad k=1,2.$$

Если использовать условия $P_{12,k}=1-P_{11,k}$, $P_{22,k}=P_{11,k}$ по определению:

$$(Vx)_k^{'}=\left(P_{11,k}-2\left(1-P_{11,k}\right)+P_{11,k}\right)x_1^2+2\left(1-P_{11,k}-P_{11,k}\right)x_1+P_{11,k}=$$
$$=\left(4P_{11,k}-2\right)x_1^2+\left(2-4P_{11,k}\right)x_1+P_{11,k}=P_{11,k}(2x_1-1)^2-2x_1^2+2x_1. \qquad (3)$$

Оценим соотношение (3) снизу.

$$(Vx)_k^{'}=P_{11,k}(2x_1-1)^2-2x_1^2+2x_1\geq -2x_1^2+2x_1=f(x_1).$$

$$\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{-2x_1^2+2x_1}{x_1}=-2x_1+2\geq 1.$$

В результате следует $(Vx)_k^{'}\geq x_1$. Если мы оцениваем соотношение (3) сверху, мы получаем следующее соотношение.

$$(Vx)_k^{'}=P_{11,k}(2x_1-1)^2-2x_1^2+2x_1\leq(2x_1-1)^2-2x_1^2+2x_1=2x_1^2-2x_1+1=g(x_1).$$

$$\frac{g(x_1)}{1-x_1}=\frac{2x_1^2-2x_1+1}{1-x_1}=-2x_1+\frac{1}{1-x_1}\leq 1.$$

В результате следует $(Vx)_k^{'}\leq 1-x_1$.

Итак, S^1находится в сиплексе

$$x_1\leq P_{11,k}x_1^2+2P_{12,k}x_1x_2+P_{22,k}x_2^2\leq 1-x_1, \qquad k=1,2$$

отношения выполнены. Отсюда следует, что $Vx\prec x$.

Теорема была доказана.

Теорема2. Следующие соотношения выполняются в симплексе S^2:

1) $\left(\left(\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3\right)\circ e_2\right)\circ e_3=\lambda\left(\left(e_1\circ e_2\right)\circ e_3\right)+\mu\left(\left(e_2\circ e_2\right)\circ e_3\right)+\nu\left(\left(e_3\circ e_2\right)\circ e_3\right),$

2) $e_1\circ\left(e_2\circ\left(\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3\right)\right)=\lambda\left(e_1\circ\left(e_2\circ e_1\right)\right)+\mu\left(e_1\circ\left(e_2\circ e_2\right)\right)+\nu\left(e_1\circ\left(e_2\circ e_3\right)\right),$

где $\lambda,\mu,\nu \in R$, $e_1, e_2, e_3 \in S^2$.

Доказательство. Покажем, что правая часть этого равенства вытекает из левой части.

Поскольку $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ есть, $\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3=(\lambda,\ \mu,\ \nu)$ есть.

$$(\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3)\circ e_2=\left(P_{22,1}\mu+P_{12,1}\lambda+P_{23,1}\nu;\ P_{22,2}\mu+P_{12,2}\lambda+P_{23,2}\nu;\right.$$

$$\left.P_{22,3}\mu+P_{12,3}\lambda+P_{23,3}\nu\right),$$

$$\left((\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3)\circ e_2\right)\circ e_3=\left[P_{33,1}\left(P_{22,3}\mu+P_{12,3}\lambda+P_{23,3}\nu\right)+P_{13,1}\left(P_{22,1}\mu+P_{12,1}\lambda+\right.\right.$$

$$\left.+P_{23,1}\nu\right)+P_{23,1}\left(P_{22,2}\mu+P_{12,2}\lambda+P_{23,2}\nu\right);\ P_{33,2}\left(P_{22,3}\mu+P_{12,3}\lambda+P_{23,3}\nu\right)+P_{13,2}\left(P_{22,1}\mu+\right.$$

$$\left.+P_{12,1}\lambda+P_{23,1}\nu\right)+P_{23,2}\left(P_{22,2}\mu+P_{12,2}\lambda+P_{23,2}\nu\right);P_{33,3}\left(P_{22,3}\mu+P_{12,3}\lambda+P_{23,3}\nu\right)+$$

$$\left.+P_{13,3}\left(P_{22,1}\mu+P_{12,1}\lambda+P_{23,1}\nu\right)+P_{23,3}\left(P_{22,2}\mu+P_{12,2}\lambda+P_{23,2}\nu\right)\right]=$$

$$=\lambda\left[P_{33,1}P_{12,3}+P_{13,1}P_{12,1}+P_{23,1}P_{12,2};\ P_{33,2}P_{12,3}+P_{13,2}P_{12,1}+P_{23,2}P_{12,2};\ P_{33,3}P_{12,3}+P_{13,3}P_{12,1}+\right.$$

$$\left.+P_{23,3}P_{12,2}\right]+\mu\left[P_{33,1}P_{22,3}+P_{13,1}P_{22,1}+P_{23,1}P_{22,2};\ P_{33,2}P_{22,3}+P_{13,2}P_{22,1}+P_{23,2}P_{22,2};\right.$$

$$\left.P_{33,3}P_{22,3}+P_{13,3}P_{22,1}+P_{23,3}P_{22,2}\right]+\nu\left[P_{33,1}P_{23,3}+P_{13,1}P_{23,1}+P_{23,1}P_{23,2};\ P_{33,2}P_{23,3}+P_{13,2}P_{23,1}+\right.$$

$$\left.+P_{23,2}^2;\ P_{33,3}P_{23,3}+P_{13,3}P_{23,1}+P_{23,3}P_{23,2}\right]=$$

$$=\lambda\left((e_1\circ e_2)\circ e_3\right)+\mu\left((e_2\circ e_2)\circ e_3\right)+\nu\left((e_3\circ e_2)\circ e_3\right).$$

ВЫВОДЫ

Теперь покажем, что левая часть происходит из правой.

$$\lambda\left((e_1\circ e_2)\circ e_3\right)+\mu\left((e_2\circ e_2)\circ e_3\right)+\nu\left((e_3\circ e_2)\circ e_3\right)=\left(\lambda(e_1\circ e_2)\right)\circ e_3+$$

$$+\left(\mu(e_2\circ e_2)\right)\circ e_3+\left(\nu(e_3\circ e_2)\right)\circ e_3=\left[\lambda(e_1\circ e_2)+\mu(e_2\circ e_2)+\nu(e_3\circ e_2)\right]\circ e_3=$$

$$=\left[(\lambda e_1)\circ e_2+(\mu e_2)\circ e_2+(\nu e_3)\circ e_2\right]\circ e_3=\left((\lambda e_1+\mu e_2+\nu e_3)\circ e_2\right)\circ e_3.$$

Аналогично доказывается второе соотношение теоремы.

Теорема была доказана.

REFERENCES

1. Ганиходжаев Р.Н. Исследования по теории квадратичных стохастических операторов, Дисс. на соис. уч. ст. докт. наук, Ташкент, 1994.
2. Нарзиев Н.Б. Алгебраические структуры, возникающие в задачах популяционной генетики, Дисс. на соис. уч. ст. кандидата наук, Ташкент, 2011.
3. А.Маршалл., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и её / приложения. М.: Мир,1983.
4. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричным неравенствам. «Наука», М., 1972.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. «Наука» , М., 1967.