KASR TARTIBLI INTEGRALLARNING KELIB CHIQISH TARIXI HAQIDA

Shukurova Mubashiraxon Furqatovna
Buxoro davlat universiteti Fizika-matematika fakul’teti magistri
Mohinur Xaydar qizi Raupova
Toshkent viloyati Chirchiq davlat pedagogika instituti o‘qituvchisi

https://doi.org/10.5281/zenodo.7058010

Annotatsiya. *Maqolada kasr tartibli integrallarning kelib chiqish tarixi haqida qisqacha ma'lumotlar keltirilgan. Kasr tartibli integro - differensial hisobi to‘g‘risida tushunchalar berilgan. Har bir olimning hissasi alohida-alohida aytib o‘tilgan. Kasr operatorlarining umumiy xossalari, kasrli Riman-Liuvil integrallarining ta’rifi, integro-differentsiatsial hisob nazariyasining qisqacha tarixi haqida bayon qilingan.*

Kalit so‘zlar: *Riman integrali, kasr tartibli integro - differensial hisobi, Kasr tartibli Riman-Liuvil integrallari, kasr tartibli Grunvald-Letnikov hosilalari, «Kasrli hisob» hisobi, Dirixle formulasi, Koshi formulasi.*

ОБ ИСТОРИИ ПРОИСХОЖДЕНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Аннотация. *В статье приведены краткие сведения о происхождении интегралов дробного порядка. Даны понятия дробного интегро-дифференциального исчисления. Изложены вклад каждого ученого отдельно. Описаны общие свойства дробных операторов, определение дробных интегралов Римана-Лиувилля, краткая история теории интегро-дифференциального исчисления.*

Ключевые слова: *интеграл Римана, дробное интегро-дифференциальное исчисление, дробные интегралы Римана-Лиувилля, дробные производные Грюнвальда-Летникова, дробное исчисление, формула Дирихле, формула Коши.*

ON THE HISTORY OF THE ORIGIN OF FRACTIONAL INTEGRALS

Abstract. *The article provides brief information about the history of the origin of fractional order integrals. Concepts of fractional integro-differential calculus have been given. The contribution of each scientist has been mentioned separately. General properties of fractional operators, definition of fractional Riemann-Liouville integrals, brief history of integro-differential calculus theory have been described.*

Keywords: *Riemann integral, fractional integro-differential calculus, fractional Riemann-Liouville integrals, fractional Grunwald-Letnikov derivatives, fractional calculus, Dirichlet's formula, Cauchy's formula.*

KIRISH

Kasr tartibli integrallar yordamida matematik analiz qilish uch asrdan ko`proq tarixga egadir. Butun XIX asr va XX asrning birinchi yarmi matematik analizning mustaqil bo`limi sifatida natijalarni to`plash va kasr hisobini shakllantirish davriga aylangan.

Ushbu maqola ilmiy-uslubiy xarakterga ega bo‘lib, uni yozishda bir nechta o‘zbek va xorijiy olimlarning kitoblari va internet ma'lumotlaridan foydalanilgan. Aytish joizki, foydalanilgan adabiyotlarda asosan olimlar faqat o‘zlari izlanish olib borayotgan yo‘nalishlar bo‘yicha kasr tartibli integrallar haqida ma'lumotlar keltirishgan. Xususan, kasr tartibli integrallar mavjud bo‘adigan funksiyalar sinfi, xossalari va shu kabilar to‘g‘risida fikrlar bayon qilingan.

Maqolada kasr tartibli integrallarning kelib chiqish tarixi, amaliyot masalalarga tadbiqlari berilgan hamda ular talabalar va magistrlarga tushunarli bo‘lishi uchun mavjud adabiyotlardagi ma'lumotlar kengroq va misollar yordamida batafsil yortilgan hamda osondan murakkabga qarab ilmiy tartibda tizimga solingan.

TADQIQOT MATERIALLARI VA METODOLOGIYASI

Matematiklar va fiziklarning ilmiy ishlarining nashrlari paydo bo`lgan. Ular: Laplas, Furye, Rieman, Abel, Lyuvil, Grunvald, Xivisayd, Kuryant va boshqalarning ilmiy asarlaridir. Mashhur rus matematik olimi A.V. Letnikov kasr tartibli matematik analizining rivojlantirishga katta hissa qo`shgan. 1868-1872- yillarda A.V. Letnikovning kasr tartibli hisoblash bo`yicha birinchi ilmiy maqolalari chiqqan.

Olimlarning kasr tartibli hisoblashga bo`lgan qiziqishlarining yangi to`lqini 1974-yilda «Kasr tartibli hisoblash» (K.B. Oldham, J. Spanier) kitobi nashr etilgandan so`ng paydo bo`lgan. Ushbu kitobda kasr tartibli hisoblash nazariyasi tizimli ravishda keltirilgan. Shu vaqtdan boshlab turli xil jurnallarning tematik sohalari paydo bo`la boshlagan, ular ilm-fan, texnika, tabiatshunoslikning turli sohalarida kasr tartibli hisoblashni qo`llashga bag`ishlangan.

Hozirgi vaqtda kasr tartibli hisoblash nazariy jihatdan ham, amaliy jihatida ham tez rivojlanish bosqichidadir. Matematik analizning bu bo`limi har xil (an’anaviy va fraktal) muhitdagi murakkab dinamik jarayonlarni matematik modellashtirish vositasiga aylangan, bu analiz, sintez, diagnostika va yangi boshqaruv tizimlarini yaratishning turli muammolarini hal qilishga imkon yaratib beradi.

Riman integrali-muayan integralning eng keng qo`llanuvchi turi hisoblanadi. Ko`pincha «muayan integral» atamasi ostida aynan Riman integral tushuniladi hamda matematik analizning barcha kurslarida eng birinchi bo`lib o`rganiluvchi integraldir. U Bernhard Riman tomonidan 1854-yilda ishlab chiqarilgan va integral tuzilishining birinchi bosqichidan biridir.

Riman integralining geometrik ma’nosi haqida qisqacha ma’lumotlar keltiramiz.

Bernhard Riman 1854-yilda integralning ta’rifni funksiyaning uzluksizlikni faraz qilmay bayon qilgan (1868-yilda, rus tilida esa 1914-yilda nashr etilgan).

Aytish joizki, Riman nazariyasining zamonaviy ko`rinishini Darbu berilgan (1879-y.).

Riman integrali grafik ostidagi yuza o’lchamini beradi. Ustidagi yuza izlanayotgan kesmani kesmalarning yakuniy soniga bo`laklaymiz. Har bir kesmachada grafikning bir nuqtasini belgilaymiz va grafikning o`sha nuqtasigacha asos sifatida kesmacha bilan vertikal to`g`riburchak yasaymiz. Bundagi to`g`ri to`rtburchaklardan hosil bo`lgan figurani ko`rib chiqamiz. Bunday figurani S yuzasi (Δx_i) uzunlikdagi kesmalarga aniq ajratishda

$$\sigma = \sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

yig`indi bilan beriladi.

Bu kesmalar uzunligini kamaytirilishi bilan bunday figura yuzasi grafik ostidagi yuzaga yaqinlashadi.

Agar funksiya $f(x)\,[a,b]$ oraliqda integrallangan bo`lsa, u holda $|f(x)|$ va $kf(x)$ $(bunda\ k = const)$ funksiyalarning ham shu oraliqda integrali oson topiladi.

Agar ikkita funksiya $f(x)\ va\ g(x\ )\ [a,b]$ oraliqda integralluvchi bo`lsa, u holda ularning yig`indisi, ayirmasi va ko`paytmasi ham integrallangan bo`ladi.

Endi funksiyaning kasr tartibli integral va hosilalari uchun zarur bo'ladigan sinflarni ta'rif va xossalarini keltiramiz.

$\Omega = [a, b]$ da $-\infty \le a \le b \le \infty$. $\Omega -$ chegaralangan kesma, yarim o`q yoki butun o`q. Agar yarim va butun o`qlar bo`lsa, $R^1 = [-\infty, \infty)$, $R^1_+ = [0, \infty)$ va R^1 bilan bitta cheksiz to`g`ri chiziqni belgilaymiz.

Gyolderning sinflarini chegaralangan kesmada ko`ramiz.

Ω da aniqlangan $f(x)$ funksiya Ω sohasida

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le A|x_1 - x_2|^{\lambda}$$

shartni qanoatlantirsa, bu funksiyalar Gyolderning sinfiga tegishli deyiladi. $x_1, x_2 \in \Omega$, A doimiy va λ - Gyolder ko`rsatkichi deyiladi.

Kasr integro - differensial hisobi (keyingi o`rinlarda - kasr hisobi, ID) 1695-yilda G. Lopital va G. Leybnits o`rtasida hosila ma'nosi haqidagi savolni muhokama qilishdan kelib chiqqan bo'lib, uch yuz yildan ortiq vaqt davomida rivojlanib kelmoqda. Integro - differensial hisobni qurishdagi birinchi qadamni 1738-yilda L. Eyler qo`ygan, u darajali funksiyasining $p$ tartibli hosilasini hisoblash natijasiga butun bo`lmagan son uchun ma'no berish mumkinligini payqagan, deb ishoniladi.

Bu yo`nalishdagi tadqiqotlarni P. Laplas, S. Lakrua va J. Furye ham olib borgan bo`lib, ular 1822- yilda ixtiyoriy, lekin yetarlicha silliq f funksiyaning ixtiyoriy musbat butun bo`lmagan p tartibli kasr hosilasining birinchi ta'rifini taklif qilganlar. $f(x)$ quyidagi integral tenglikka asoslanadi:

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^p d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\left(tx - t\gamma + \frac{p\pi}{2}\right) dt,$$

bu yerda t va γ - integral o`zgaruvchilari.

XX asrning birinchi yarmida, taxminan 1920-yillardan boshlab, tadqiqotlar nafaqat fundamental matematik xususiyatga ega, balki ID apparatidan foydalanish asosida fizik tizimlarni modellashtirish va ularning xususiyatlarini tushuntirish bilan bog`liq tadqiqotlar ham rivojlana boshladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, bunday tadqiqotlarga birinchi urinishlar J. Liuvil va N. Abel tomonidan integral va kasr tartibli hosilalari bo`lgan tavtoxron muammosi va integral tenglamalar yoki munosabatlar paydo bo`ladigan boshqa klassik muammolarni hal qilishda foydalanilgan. XIX asr oxiri - XX asr boshlarida O. Xevisayd elektr zanjirlarining hisob-kitoblarini amalga oshirish imkonini beradigan operativ hisob-kitobni qurdi.

O. Xevisayd va T. Bromvich yarim cheksiz rezistiv sig`imli chiziq kabi taqsimlangan tizimlar uchun uzatish funksiyasi (impedans) 72 tartibli hosila bo`lgan integro-differensial operator bilan ifodalanishini ko`rsatdi.

XX asrning 30-40-yillarida A. Gemant, A.N. Gerasimov, G.V. Skott-Bler va Y.N. Rabotnov elastik materiallarning xossalarini keng qamrovli tadqiqotlar o`tkazdi, uning davomida tolali polimerlarda kuchlanish fraksiyonel quvvat funksiyasi va deformatsiyaning konvolyutsiyasi yoki deformatsiyaning hosilasi sifatida ifodalanishi ham ko`rsatildi. Bunday holda, quvvat funksiyasidagi kasr ko`rsatkichi bunday materiallarning haqiqiy fizik xususiyatlariga bog`liq.

XX asr o`rtalarida F.Maynardi va M.Kaputolar termoelastiklik masalalarida modellar qurish uchun kasr tartibli differensial tenglamalardan foydalanish fizik mulohazalardan ko`ra, ko`proq adekvat ekanligini va hisob-kitoblarda eksperimental kuzatilgan ma'lumotlarni aniqroq takrorlash imkonini berishini ko`rsatdi.

Keyingi umumlashtirishlar Y.N. Rabotnov, R. Bagley va P. Torvik elastik materiallarning deformatsiyasi paytida gisterezis ta'sirini kuzatish va bu materiallarning turli dinamik yuklanish sharoitida turli xil xatti-harakatlariga oid bir qator eksperimental ma'lumotlarni tushuntirishga imkon berdi. Hozirgi vaqtda ID dan foydalanishga asoslangan elastik muhitning hatti-harakatlarining bir qator murakkab va chuqur ishlab chiqilgan modellari mavjud bo`lib, ular uchun faqat butun sonli tartibni ishlatadigan modellarga nisbatan eksperiment va jismoniy ma'no bilan aniqroq muvofiqlik namoyish etilgan.

Boshqaruvchi tenglamalarda nafaqat ba'zi funksiyalar va ularning hosilalari, balki ularning integral konvolyutsiyalari (bundan tashqari, kasr quvvat yadrosi bilan) ko`rinishida ifodalangan. Shunga o`xshash jismoniy omillar ham g`ovakli, donador, quvurli, tolali va boshqa bir hil bo`lmagan murakkab tuzilmali muhitlar va ulardagi uzatish jarayonlari ham bunga misol bo'ladi.

XX asr o`rtalarida dielektriklarda bo`shashish va elektro-kimyoviy muhitning hatti-harakatlariga oid nashrlar paydo bo`ldi. Kondensatorlar va elektro-kimyoviy elementlarni zaryadlash va zaryadsizlantirish jarayonlarida xotira hodisasi mavjudligini ko`rsatadigan tajribalar o`tkazildi. Ushbu tajribalar uchun kasr tartibidagi differensial tenglamalarga asoslangan modellar tuzildi va butun tartibli tenglamalarga asoslangan modellarga nisbatan simulyatsiya natijalarining yaxshiroq mosligi ko`rsatildi.

Keyinchalik, ID yarimo`tkazgichlar fizikasi, plazma fizikasi, astrofizika va boshqalarda turli jarayonlar (tartibsiz muhitda o`ta past bo`shashish, tashish va to`lqin jarayonlari) modellarini qurish uchun muvaffaqiyatli qo`llanildi.

XX asrning ikkinchi yarmida tadqiqotchilar tizimlar va signallar nazariyasida ID dan foydalanish imkoniyatiga e'tibor qaratdilar. Shu munosabat bilan o`zgarishlar hisobini «kasrli» umumlashtirish va kasrli differensial qo`shimchalar nazariyasi, shuningdek klassik integral o`zgarishlarni (Furye, Laplas, Gilbert va boshqalar) kasrli umumlashtirish bo`yicha ishlar rivojlana boshladi. 1974-yilda kasr hisobiga oid birinchi monografiya nashr etildi. O`sha yili B. Ross Nyu-Xeyven universitetida ID muammolari va uning qo`llanilishiga bag`ishlangan 1-xalqaro konferensiyani tashkil qildi (Fractional Calculus and It Applications).

XX va XXI asrlar oxirida ID ning vektor umumlashtirishi ishlab chiqilgan. DI nuqtayi-nazaridan tavsifi ko`proq mos keladigan haqiqiy tizimlar sonining sezilarli o`sishi munosabati bilan ushbu tizimlar uchun samarali usullar va boshqaruv asboblarini ishlab chiqish zarurati juda dolzarb bo`lib qoldi.

So`nggi yillarda kasr-tartibli kontrollerlarni loyihalashga bag`ishlangan yo`nalish faol rivojlanmoqda. Bunday qurilmalar an'anaviy proportsional-integral hosilaviy kontrollerlarga (PID-kontrollerlar) qaraganda ko`proq sozlanish parametrlariga ega, bu integratsiya va differentsial aloqalar ko`rsatkichlarini o`zgartirish imkoniyati tufayli va boshqaruv tizimlari vazifalarida ham yuqori samaradorlik va moslashuvchanlikni butun va kasr tartiblarini namoyish etdi.

Hozirgi vaqtda jadal ilmiy-texnika taraqqiyoti ta'sirida ID kuchli ilmiy yo`nalishga aylandi, jumladan fundamental va amaliy tadqiqotlar bu zamonaviy tadqiqotchilarning qiziqish ob'ektiga aylangan fizik tizimlar va jarayonlarni aniqroq tavsiflash zarurati bilan bog`liq. Bunday tizim va jarayonlarning o`ziga xos xususiyatlari ularning nolokal tabiati va xotira hodisasidir. Masalan, bu mikrostruktura va nanostrukturali muhitlarga, bundan tashqari tabiat va texnologiyadagi deterministik va xaotik (shu jumladan, «fraktal-xaotik») jarayonlarga tegishli.

ID muammolari va uning fan va texnikaning turli sohalarida qo`llanilishi bo`yicha nashrlarning boy bibliografiyasi ID masalalarining sezilarli darajada ishlab chiqilganligidan dalolat beradi. ID rivojlanishiga ham uni qo`llashning turli jihatlariga ham bag`ishlangan ko`plab monografiyalar va mavzuli maqolalar to`plamlari mavjud.

Ilmiy nashrlarning taniqli ma’lumotlar bazalarida (Science Direct, E-Library, Scopus, IOP Publishing, SpringerLink va boshqalar) «kasr hisobi», «kasr operatorlari», «kasr tenglamalari» kalit so`zlari bo`yicha qidiruv so`rovlari 100 mingdan ortiq natijani beradi. Fraksiyonel analiz konferentsiyalari muntazam ravishda o`tkaziladi, shu jumladan Avtomatik boshqaruv bo`yicha Xalqaro Kongress (IFAC) bilan birgalikda «Fraktsion farqlash va uning qo`llanilishi» (FDA) konferentsiyasi bunga misol bo’ladi.

Dunyoda ID g`oyalarini rivojlantirayotgan olimlar F. Maynardi, I. Podlubniy, Y.Q. Chen (Y.Q. Chen), A.M. Naxusheva, A.A. Kilbasa, R.Sh. Nigmatullina va boshqalar nomlari bilan bog`liq bo`lgan bir qancha asosiy ilmiy maktablar mavjud. ID muammolari va uning qo`llanilishi bo`yicha to`rtta ixtisoslashgan jurnal nashr etilgan: «Fraktsion hisoblash va amaliy analiz» (1998-yildan Bolgariya Fanlar Akademiyasi Matematika va Informatika instituti tomonidan nashr etiladi), «Jurnal Fractional Calculus» (1992-yildan beri Descartes Press Co. tomonidan nashr etilgan), «Fractional Differential Equations» (2010-yildan beri Element D.O.O tomonidan nashr etilgan), «Kasrli hisob-kitoblarda aloqalar» (2010-yildan Publisher Academic tomonidan nashr etilgan).

Ushbu asarlarda asosiy e’tibor kasr tartibli integrallar va kasr tartibli differensiallash operatsiyalarining adekvat talqinini izlashga bag`ishlangan ishlarga va fraksional dinamik tizimlarni modellashtirish va ularni boshqarish muammolarida ID dan foydalanishga bag`ishlangan ishlarga qaratilgan.

Ushbu maqolada qisqaroq holda ID ning matematik asoslari, differensial (aniqrog`i, integro-differensial yoki differensial-integral) tenglamalar nazariyasi va kasr tartibli hosilalari bilan qo`shilishlar hamda o`zgarishlarning kasr tartibli hisobi ko`rib chiqiladi. Kasr amallarini talqin qilishda (geometrik, fizik, ehtimollik-statistik) turli yondashuvlar ham ko`rib chiqiladi. Kasr tartibli dinamikaning real ko`rinishlari, real tizimlarni tavsiflashda kasr tartibli operatorlardan foydalanishning fizik ma’nosi va fizik oqibatlari ham qisqacha ko`rib chiqiladi.

TADQIQOT NATIJALARI

Kasr tartibli integral taniqli Koshi formulasini umumlashtirish asosida aniqlanadi, bu butun tartibning ko`p integralini bittaga kamaytirish imkonini beradi:

$$\int_{\alpha}^{x} dt_n \int_{\alpha}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{\alpha}^{t_2} f(t_1)dt_1 =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)dt, n \epsilon N. \qquad (1)$$

Butun bo`lmagan $n$ bo`lsa, bundan keyin u α sifatida belgilanadi, (1) ifodaning o`ng tomonida $(n-1)!$ Gamma funksiyasi bilan almashtiriladi. Kasr tartibli integrallarining turli rasmiy ta’riflaridagi farqlar integral chegaralarini va integral osti funksiyalarini (aniqrog'i, integral yadrosini) belgilashning turli usullari bilan bog`liq.

Shu o’rinda (1) formulaning o’rinli ekanligini isbotlaymiz.

Buni matematik induksiya usuli bilan isbotlaylik.

$n = 1$ uchun tenglik:

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)dx = \frac{1}{0!}\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt.$$

Faraz qilaylik $n = k$ uchun:

$$\int_{\alpha}^{x} dx \int_{\alpha}^{x} dx \ldots \int_{\alpha}^{x} f(x)dx = \frac{1}{(k-1)!}\int_{\alpha}^{x} (x-t)^{k-1} f(t)dt$$

Bu yerda chap tomonda k karrali integral joylashgan.

$n = k + 1$ uchun (1) formulaning ning to`g`riligini isbotlaymiz. Ya'ni, buni isbotlaymiz:

$$\int_{\alpha}^{x} dx \int_{\alpha}^{x} dx \ldots \int_{\alpha}^{x} f(x)dx = \frac{1}{k!}\int_{\alpha}^{x} (x-t)^{k} f(t)dt.$$

Bizga ma'lumki, ushbu formuladan

$$\int_{\alpha}^{x} dx \int_{\alpha}^{x} dx \ldots \int_{\alpha}^{x} f(x)dx = \frac{1}{(k-1)!}\int_{\alpha}^{x} dx \int_{\alpha}^{x} (x-t)^{k-1} f(t)dt$$

hosil bo`ladi.

Dirixle formulasi bo`yicha integrallash tartibini o`zgartiramiz va ichki integralni topamiz:

$$\int_{\alpha}^{x} dx \int_{\alpha}^{x} dx \ldots \int_{\alpha}^{x} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt \int_{t}^{x} (x-t)^{k-1} dx =$$

$$= \frac{1}{k(k-1)!}\int_{\alpha}^{x} (x-t)^{k} f(t)dt.$$

Berilgan funksiya $f(x) \in AC^{m}(\Omega)$ ekanligidan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\,(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_{\alpha}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

va

$$\int_{\alpha}^{b} |f(t)|dt < \infty$$

va

$$c_k = \frac{f^{k}(\alpha)}{k!}, f(t) = f^{(n)}(t)$$

va

$$(n-1)! = \Gamma(n)$$

dan, biz (1) ning o`ng tomoniga $n$ ning butun bo`lmagan qiymatlari uchun ham ma'no berilishi mumkinligini ko`ramiz.

Kasr tartibli hosilasini aniqlashda ikkita asosiy yondashuv mavjud. Ulardan birinchisi, kasr tartibli integralidagi kabi Koshi formulasini (1) umumlashtirishga asoslanadi.

Bu yondashuv J. Liuvil, B. Riman, X. Xolmgren, G. Weil, A. Marsho, J. Hadamard, M. Riess, N.Ya. Sonin va A.V. Letnikov, xuddi shu yondashuv A. Erdelyi va X. Kober, J. Kossard, S.G. Samko, S.P. Geysberg va boshqalarning modifikatsiyalari asosida yotadi [1].

Ikkinchi yondashuv A. Grunvald va A.V. Letnikovning ishlarida ishlab chiqilgan va hosila ta’rifini funksiyaning cheksiz kichik o`sishlar nisbati chegarasi va uning argumenti sifatida umumlashtirishga asoslangan. Ushbu yondashuv g`oyasini J. Liuvil bildirgan.

E. Post chegara orqali kasr tartibli hosilasini aniqlashda Grunvald-Letnikov yondashuvini umumlashtirishni taklif qilgan.

Kasr tartibli integralining ta’rifi eng keng tarqalgan va ko`pchilik ilovalarda qo`llaniladigan- Riman-Liuvil ta’rifidir. Kasr tartibli hosilalar holi Riman-Liuvil, Kaputo va Grunvald-Letnikovlarning ta’riflari xuddi shunday pozitsiyani egallaydi. Quyida biz chap qo`l (chap tomon) operatorlari uchun ushbu ta’riflarning qat’iy formulalarini beramiz.

Ta’rif 1. $f(x)\epsilon L^1(a,b), a,b\epsilon R^1$ funksiyaning ixtiyoriy butun bo`lmagan $\alpha > 0$ tartibli Riman-Liuvil

$$ {}_{a}I_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} $$

kasr integrali ifoda bilan aniqlanadi

Ta’rif 2. $f(x)\epsilon L^1(a,b), a,b\epsilon R^1$ funksiyaning ixtiyoriy butun bo`lmagan $\alpha > 0$ sonli tartibli kasr Riman-Liouvil hosilasi

$$ {}_{\alpha+}^{RL}D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} \int_\alpha^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\{\alpha\}}} $$

ifoda bilan aniqlanadi.

Bu yerda $[\alpha]$ va $\{\alpha\}$ mos ravishda α ning butun va kasr qismlari.

<u>Kasr operatorlarining umumiy xossalari</u>

Kasrli tartibli integral va differentsiallash chiziqli amallardir. Argumentlarni inversiya qilish operatsiyasi mos keladigan turdagi chap qo`l (chap tomon) hosilasini o`ngga o`zgartiradi. Kasr tartibli Riman-Liuvil integrallari va kasr tartibli Grunvald-Letnikov hosilalari uchun quyidagi yarim guruh xossasi to`g`ri bo`ladi:

$$ {}_{\alpha}I_x^{\alpha}\, {}_{\alpha}I_x^{\beta} = {}_{\alpha}I_x^{\alpha+\beta}, $$
$$ {}_{\alpha}^{GL}D_x^{\alpha}\, {}_{\alpha}^{GL}D_x^{\beta} = {}_{\alpha}^{GL}D_x^{\alpha+\beta}. $$

DI ning fundamental nazariy savollaridan biri kasr tartibli integrali va kasr tartibli hosilasi operatorlarining o`zaro muvofiqligi (qaytarilish ma’nosida) masalasidir.

Bu yerda ikkita asosiy nuqtai nazar mavjud.

Ulardan biri eng ko’p keng tarqalgani, Riman-Liuvil bo`yicha o`zaro teskari amallar kasr tartibli integral va kasr tartibli hosila (bir xil tartibdagi) deb taxmin qilishdir. Bunday holda, hosilani integrallash natijasi segment oxiridagi funktsiya qiymatlari farqi bilan emas (Nyuton-Leybnits formulasiga o`xshash), balki kasrni o`z ichiga olgan murakkabroq formula bilan ifodalanadi. Mustaqil o`zgaruvchining quvvat funksiyasi, unda koeffitsient sifatida boshlang`ich nuqtasida kasr hosilalarining qiymatlarini o`z ichiga oladi:

$$ {}_{\alpha}I_x^{\alpha}\, {}_{\alpha}^{RL}D_x^{\alpha} f(x) = $$
$$ f(x) - \sum_{j=1}^{[\alpha]+1} \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \left(\frac{d^{[\alpha]+1-j}}{dx^{[\alpha]+1-j}}\, {}_{\alpha}I_x^{1-\{\alpha\}} f(x) \right)\Bigg|_{x=a} \qquad (2) $$

Ba'zan (2) formula Nyuton-Leybnits formulasini kasr tartibli umumlashtirishi deb ataladi.

Boshqa bir nuqtai-nazar kasr tartibli integrali va kasr tartibli hosilalar o`zaro teskari operatsiyalar sifatida Nyuton-Leybnits tipidagi formula bilan bog`lanishi kerak degan tushunchaga asoslanadi:

$$ {}_{\alpha}I_x^{\alpha}\, {}_{\alpha}D_x^{\alpha} f(x) = f(x) - f(a). \qquad (3)$$

(3) tenglik

$$ {}_{\alpha}D_x^{\alpha} = {}_{\alpha}^{C}D_x^{\alpha} $$

uchun amal qilishi ko`rsatilgan, ya'ni, o`zaro teskari amallar Riman-Liuvil kasr tartibli integrali va Kaputo kasr (3) differensiali hisoblanadi.

Kasr tartibli intagralni quyidagicha aniqlash mumkin.

Ta'rif 3. $\varphi(x)\epsilon L_1(a,b)$,

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \quad x > a \qquad (4)$$

$$(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \quad x < b \qquad (5)$$

integrallar bo`lsin.

$a > 0$ bo`lsa, mos ravishda chap (4) va o`ng (5) Riman-Liuvil α (kasr) tartibli integrallari deyiladi.

Endi kasr tartibli integrallarning yarimguruh xususiyatiga ega

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = I_{a+}^{\beta+\beta}\varphi$$

(6) formulani isbotlaymiz.

Bizda

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_a^x \frac{I_{a+}^{\beta}\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-a}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\int_a^x \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}}.$$

Dirixle formulasi bo`yicha integrallash tartibini o`zgartiramiz va shundan so`ng ichki integralda $t = \tau + s(x-\tau)$ o`zgarishi qilamiz:

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \varphi(\tau)d\tau \int_\tau^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}}\int_0^1 s^{\beta-1}(1+s)^{\alpha-1}ds =$$

$$= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(x-\tau)^{1-(\alpha+\beta)}} =$$

$$= I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi.$$

Integrallash tartibini qayta tashkil etish bu yerda Fubini teoremasi yordamida amalga oshiriladi.

Riman-Liuvil kasr tartibli integralining chegaralanganligi haqidagi lemmani isbotlaymiz.

Lemma. Kasr tartibli integral operatori $I_{a+}^{a}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ da $L(a,b)$ da chegaralangan:

$$\|I_{a+}^{a} g\|_{L(a,b)} \leq \frac{(b-a)^{a}}{\alpha|G(\alpha)|}\|g\|_{L(a,b)}.$$

Isbot. Dirixlet formulasini qo`llash orqali quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\|I_{a+}^{a} g\|_{L(a,b)} = \int_{a}^{b} |I_{a+}^{a} g(x)| dx =$$

$$= \frac{1}{|G(\alpha)|}\int_{a}^{b} dx \left|\int_{a}^{b} \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt\right| =$$

$$\leq \frac{1}{|G(\alpha)|}\int_{a}^{b} dx \int_{a}^{x} \frac{|g(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}} dt =$$

$$= \frac{1}{|G(\alpha)|}\int_{a}^{b} |g(t)| dt \int_{t}^{b} (x-t)^{a-1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{a|G(a)|}\int_{a}^{b} |g(t)|\,(b-t)^{a} dt =$$

$$\leq \frac{(b-a)^{a}}{a|G(\alpha)|}\int_{a}^{b} |g(t)| dt = \frac{(b-a)^{a}}{a|G(\alpha)|}\|g\|_{L(a,b)}.$$

Integro-differentsiatsiya nazariyasiga qisqacha qo'shimcha tarixiy sharh

Kasr tartibli hisob uzoq tarixga va juda boy tarkibga ega. Zamonaviy g`oyalarni ko`rib chiqishga o`tishdan oldin, kasr tartibli operatorlar nazariyasining rivojlanishini qisqacha ko'rib chiqamiz. Ularni fizik-kimyoviy modellashtirish quyida ko`rib chiqiladi. Leybnits tomonidan kasr tartibli hosila haqida ko`tarilgan masala 300 yildan ortiq (yuqorida aytib o'tilgan) vaqtdan beri takrorlanadigan mavzu bo`lib kelgan. Kasr tartibli hisobning hozirgi holati nashrlarning katta oqimi, jurnallarni yaratish va har yili xalqaro konferentsiyalar o`tkazish bilan tavsiflanadi.

Kasrli matematik analizga qiziqish klassik analizning paydo bo`lishi bilan deyarli bir vaqtda paydo bo`ldi (G. Leybnits 1695-yilda G. Lopitalga yozgan maktublarida ½ tartibli differentsiallar va hosilalarni ko`rib chiqishda bashoratli so`zlarni ifodalagan: «... Foydali oqibatlar vaqt o`tishi bilan bu paradoksdan kelib chiqadi»).

Ehtimol, bu masalani ko`proq yoki kamroq tizimli o`rganish XIX asrga to`g`ri keladi. va N. Abel (1823 yil), J. Liovil (1832 yil), B. Riman (1847 yil) va X. Holmgren (1864 yil) ga tegishli, garchi ilgari hissalar L. Eyler (1730 yil) va J. Lagranj (1772 yil) tomonidan kiritilgan .

Aynan o`zining asarlari davrida J. Liuvil (1832 - 1835 yillar) darajalar qatoridagi funksiyalarni kengaytirishdan foydalanib, atama bo`yicha differensiallash yo`li bilan «q» tartibli hosilasini aniqladi. U, xususan, matematik fizika masalalarini yechishda o`zi yaratgan nazariyaning birinchi amaliy qo`llanilishini berdi. Keyin B. Riman (1847 yil) butun bo`lmagan darajali qatorlar uchun mos aniq integralga asoslangan boshqa yechimni taklif qildi. B. Rimanning talabalik yillarida qilgan bu asari faqat 1876 yilda (o`limidan 10 yil o`tib) nashr etilgan. Liuvil va Riman konstruksiyalari kasr integralining asosiy shakllari hisoblanadi. Liuvil g`oyasini rivojlantirib, A. Grunvald (1867 yil) ayirm munosabatlarining chegarasi sifatida kasr hosilasi tushunchasini kiritdi.

MUHOKAMA

Nazariy ishlar bilan bir qatorda, turli muammolarni hal qilish uchun kasr analizining qo`llanilishi ishlab chiqildi. Bunday birinchi qo`llanmalardan biri N.Abelning (1823 yil) kashfiyoti bo`lib, u tautoxron masalasining yechimini yarim butun tartibli hosila sifatida yoziladigan integral o`zgartirish orqali olish mumkinligini ko`rsatdi. Abel muammoni faqat ½ ga teng indeks qiymati bilan hal qilgan degan noto`g`ri tarixiy tushuncha mavjud.

Darhaqiqat, Abel yechimni umumiy holatda ko`rib chiqdi va uning ishi kasr tartibli integro-differentsial g`oyalarini rivojlantirishda katta rol o`ynadi. Xolmgrenning yutug`i kasr tartibli differensialni integralga teskari operatsiya sifatida ko`rib chiqish va bu tushunchalarni oddiy differensial tenglamalarni yechishda qo`llashdir.

Peterburg Fanlar akademiyasi (1884 yil) A.V. Letnikov (1837 – 1888 yillar), o`zining 20 yillik ilmiy faoliyati davomida ixtiyoriy ko`rsatkich bilan differentsialning to`liq nazariyasini ishlab chiqdi (hozirda uning asarlari deyarli butunlay unutilgan).

A.V. Letnikovning asarlari xorijda deyarli noma’lum bo`lib qolgan. Rossiyada A.V. Letnikovdan keyingi davrda N.Ya. Sonin va P.A. Nekrasovlar tomonidan ilmiy izlanishlar olib borilgan. Ushbu rus olimlarining nomlari, shuningdek, kompleks tekislikdagi analitik funktsiyalar uchun Koshi formulasini integro-differentsial indeksining butun bo`lmagan qiymatlariga kengaytirish bilan bog`liq.

Yuqorida tilga olingan olimlarning ishlarining ahamiyatini e’tirof etgan holda, shuni ta’kidlash kerakki, kasr tartibli hisob faqat A.V. Letnikovning asarlaridan boshlab qat’iy matematik nazariyaga aylangan.

XIX asr oxiri 1892-yilda J. Hadamardning mazmunli asari nashr etilgan. Unda Teylor qatoriga kengaytirish asosida aylanadagi funksiya analitikasining radiusga nisbatan kasrli tartibli differensiali ko`rib chiqilgan, bu o’z navbatida Hadamard yondashuvi deb ataladi.

XX asrning birinchi yarmida. G. Xardi, G. Vayl, M. Riss, P. Montel, A. Marcho, D. Littlewood, J. Tamarkin, E. Post, S. L. Sobolev, A. Zigmund, B. Nagy, A. Erdeyi, X. Kober, J. Kossar va boshqa qator olimlar bu yo’nalishni rivojlantirishda o`z hissalarini qo`shganlar.

1915-yilda G. Xardi va M. Riss divergent qatorlarni yig`ish uchun kasr tartibli integraldan foydalanganlar. 1917-yilda G. Veyl davriy funksiyalar uchun kasrli tartibli integralni qandaydir maxsus funksiyaga ega bo`lgan konvolyutsiya sifatida aniqlagan.

S.N. Bernshteyning analogi algebraik polinomlarning chekli oraliqdagi kasr hosilalari uchun 1918-yilda P. Montel tomonidan berilgan. A. Marcho (1927 yil) ishida cheksizlikda «yomon» hatti-harakatlarga ega bo`lgan funktsiyalarga nisbatan qo`llaniladigan kasrli tartibli differentsialning yangi shakli Marshotning kasr hosilalari kiritilgan. M. Riss (1936, 1938, 1949 yillar) ishlarida potentsial tipdagi operatorlar (Riss potentsiallari) olingan. Bu esa bir necha o`zgaruvchilar funksiyalarining kasr integrasiyasini aniqlash imkonini bergan. Ayrim integral operatorlar va integral tenglamalar uchun Erdeyi va Kober (1940 yil) va boshqalarning kasr integrallari juda foydali bo`lib chiqqan.

Ayniqsa, radiofiziklar va radiotexniklar uchun O. Xevisayd (1892, 1893, 1920 yillar) tomonidan ishlab chiqilgan operativ hisob-kitoblar umumlashtirilgan hosilalarni qo`llashda muhim qadam bo`lib chiqqanini ta’kidlaymiz [2-5]. O. Xevisayd (1920 yillar) elektr uzatish liniyalari nazariyasida kasrli tartibli differensialni qo`llagan. Shundan so`ng boshqa nazariyotchilar bu yondashuvning afzalliklarini tan olganlar va uni qabul qilingan matematik tushunchalarga muvofiq ishlab chiqa boshlaganlar (N. Wiener, J. Carson, 1926 yillar).

XULOSA

Kasr tartibli hosilalari va integrallar apparati fizika, mexanika, kimyo, gidrologiya, tortishish nazariyasi va boshqalarda qo`llaniladi. Jumladan, turli biologik jarayonlarni o‘rganish uchun ularning matematik modellari tuziladi [2-14]. Bu modellarning asosida kasr tartibli integrallar yotadi. Bu matematik modellar asosan turli individlarning populyatsiyasini, uni kelajakda o‘zini qanday tutishini o‘rganishga qaratilgan [15-28]. Modellar asosan oddiy va xususiy hosilali chiziqsiz differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi. Ushbu maqolalarda differensial tenglamalarning yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlashda kasr tartibli integrallar, ularning xossalari asosiy rol' o‘ynaydi.

Ta'kidlab o‘tamiz, maqolaning bayon qilinish strukturasi tizimli tartibda tuzilganligi, bir qator ta'riflarni keltirilishi, kasr tartibli integrallar mavjud bo‘ladigan sinflar va xossalari haqida to‘liq ma'lumotlar bayon qilinishi hamda ma'lumotlarni osondan-murakkabga qarab yoritilishi talabalar va magistrlarga mavzuni oson tushunishda yordam beradi.

REFERENCES

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дроб-ного порядка и некоторые их приложения, Минск, Наука и техника, 688 с.
2. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Роль математики в биологических науках // Проблемы педагогики, № 53:2 (2021), с. 7-10.
3. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Математические модели и законы в биологии // Scientific progress, 2:2 (2021), p.870-879.
4. Расулов Х.Р. О некоторых символах математического анализа // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), p.66-77.
5. Расулов Х.Р. О понятие асимптотического разложения и ее некоторые применения // Science and Education, scientific journal, 2:11 (2021), pp.77-88.
6. Расулов Х.Р., Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяциянинг динамикаси ҳақида // Scientific progress, 2:1 (2021), p.665-672.
7. Расулов Х.Р., Камариддинова Ш.Р. Об анализе некоторых невольтерровских динамических систем с непрерывным временем // Наука, техника и образование, 77:2-2 (2021) с.27-30.
8. Rasulov Kh.R. (2018). On a continuous time F - quadratic dynamical system // Uzbek Mathematical Journal, №4, pp.126-131.
9. Rasulov X.R., Qamariddinova Sh.R. Ayrim dinamik sistemalarning tahlili haqida // Scientific progress, 2:1 (2021), p.448-454.
10. Шукурова М.Ф., Раупова М.Х. Каср тартибли интегралларни ҳисоблашга доир методик тавсиялар // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), 65-76 b.
11. Rasulov X.R. Sayfullayeva Sh.Sh. Buzilish chizig’iga ega bo’lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun qo’yiladigan chegaraviy masalalar haqida // Science and Education, scientific journal, 3:3 (2022), p.46-54.
12. Мирсабуров М., Чориева С.Т. Задача с аналогом условия Франкля на характеристике для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Изв. вузов. Матем., 2017, 11, с.39–45.

13. Мирсабуров М., Чориева С.Т. Задача с условием смещения на параллельных характеристиках для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом // Изв. вузов. Матем., 2017, 5, с.61–70.
14. Xaydar R. Rasulov. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // Journal of Physics: Conference Series 2070 012002 (2021), pp.1–11.
15. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
16. Rasulov, X. (2022). Об одном краевом задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).
17. Qizi, A. K. S. (2022). Texnik oliy ta'limda matematikaning mutaxassislik fanlari bilan integratsiyasini ta'minlash vositalari. Science and innovation, 1(1), 446-459.
18. Rasulov H. KD problem for a quasilinear equation of an elliptic type with two lines of degeneration // Journal of Global Research in Mathematical Archives. 6:10 (2019), p.35-38.
19. Расулов Х.Р. (1996). Задача Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №12, с.12-16.
20. Расулов Х.Р., Раупова М.Х. Яшиева Ф.Ю. Икки жинсли популяция ва унинг математик модели ҳақида // Science and Education, scientific journal, 2:10 (2021), p.81-96.
21. Rasulov, R. X. R. (2021). Гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
22. Rasulov, X. (2021). Краевая задача для одного нелинейного уравнения смешанного типа. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
23. Rasulov, H. (2021). Funksional tenglamalarni yechish bo'yicha ba'zi uslubiy ko'rsatmalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).
24. Салохитдинов М.С., Расулов Х.Р. (1996). Задача Коши для одного квазилинейного вырождающегося уравнения гиперболического типа // ДАН Республики Узбекистан, №4, с.3-7.
25. Rasulov, H. (2021). «Kompleks analiz» fanida mustaqil ta'limni tashkil qilish. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5)
26. Rasulov H. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // Центр научных публикаций (buxdu. uz) 5:5 (2021).
27. Rasulov, R. X. R. (2021). Boundary value problem in a domain with deviation from the characteristics for one nonlinear equation of a mixed type // Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 7(7).
28. Исломов Б., Расулов Х.Р. (1997). Существование обобщенных решений краевой задачи для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // ДАН Республики Узбекистан, №7, с.5-9.
29. Расулов Х.Р., Собиров С.Ж. Задача типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Scientific progress, 2:1 (2021), p.42-48.