UIF-2022: 8.2
ISSN: 2181-3337
SCIENCE AND INNOVATION
INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL
2022
№4

СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Отакулов Салим
Доктор физико-математических наук, профессор Джизакского политехнического института
Рахимов Бойхуроз Шермухамедович
Ассистент Джизакского политехнического института
https://doi.org/10.5281/zenodo.6968070

Аннотация. *В работе рассматривается математическая модель системы управления в виде дифференциального включения. Исследована проблема управляемости данной системы для подвижного терминального множества* $M = M(t)$*. Для этой модели динамической системы определено понятие множества M-управляемости. Используя методы теории дифференциальных включений и многозначных отображенй, изучены структурные и топологические свойства M-управляемости.*

Ключевые слова: *динамическая система, дифференциальное включение, задача управляемости, терминальное множество, множество управляемости.*

FEATURES OF THE CONTROLLABILITY SET OF ONE CLASS OF DIFFERENTIAL INCLUSION

Abstract. *In this paper we consider the mathematical model of control system in the form differential inclusion. The problem of controllability of this system under condition mobility of the terminal set* $M = M(t)$ *is researched. For this mathematical model of dynamic system given a notion of the M-controllability set. Using the methods of the theory differential inclusion and multi-valued maps the structural and topological properties of M-controllability set are studied.*

Keywords: *dynamic system, differential inclusion, control problem, terminal set, controllability set.*

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные включения представляют большой интерес как удобный математический аппарат исследования в теории динамических систем управления[1–3]. Они имеют широкие приложения в теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, дифференциальных играх, задачах управления в условиях неточности информации и неопределенности параметров и других вопросах прикладной математики. Возрастает интерес к таким моделям динамических систем и расширяется сфера их исследования. Изучаются функционально-дифференциальные включения, дифференциальные включения с запаздываниями, импульсные дифференциальные включения, дифференциальные включения с нечеткой правой частью, управляемые дифференциальные включения и другие классы таких моделей [4–8].

Важной характеристикой динамической системы управления является ее управляемость, т.е. возможность достижения требуемого терминального состояния с помощью управляемых движений – траекториями, выходящих из множества начальных состояний. В теории управления достаточно важное внимание уделено вопросам управляемости для моделей динамических систем с различными математическими описаниями и содержаниями. Для отдельных классов стационарных и нестационарных систем найдены необходимые и достаточные условия управляемости [9–12]. В теории управления изучаются также проблемы условной, относительной управляемости и локальной управляемости [10,11,14].

Задача управляемости динамических систем имеет новое содержание для моделей, описываемых различными классами дифференциальных включений. Отдельные свойства типа локальной управляемости и управляемости в малом для систем, описываемых дифференциальными включениями, изучены в работах [1,15]. Вопросам управляемости ансамбля траекторий дифференциальных включений с параметрами управления посвящены работы [16,17,18].

Для динамических систем одним из актуальных проблем является изучение свойства управляемости допустимых траекторий дифференциального включения относительно заданных терминальных состояний. Исследование задачи управляемости для дифференциальных включений способствуют развитию вопроса о необходимых и достаточных условиях управляемости динамических систем. Свойство управляемости динамической системы приобретает особый смысл в тех случаях, когда терминальное множество подвижное, т.е. может изменять свое положение в зависимости от времени. Представляет большой интерес изучение структурных свойств множества управляемости дифференциальных включений относительно подвижного терминального множества[19–21].

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Рассмотрим математическую модель динамическую системы в виде дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t,x). \tag{1}$$

Под допустимыми траекториями рассматриваемой системы будем понимать каждую абсолютно непрерывную на некотором отрезке $T=[t_0,t_1]$ n-вектор функцию $x=x(t)$, удовлетворяющую почти всюду на $T=[t_0,t_1]$ заданному дифференциальному включению.

Пусть задано подвижное, т.е. зависящее от времени терминальное множество $M=M(t),\ t\geq t_0$.

Определение 1. Множество всех начальных состояний $x_0\in R^n$, из которых дифференциальное включение (1) управляемо в подвижное терминальное состояние $M=M(t)$ на заданном отрезке времени $T=[t_0,t_1]$, т.е. существует траектория $x(t)$, $T=[t_0,t_1]$, такая, что $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)\in M(t_1)$, называется множеством MT–управляемости дифференциального включения.

Определение 2. Множеством M-управляемости дифференциального включения называется совокупность всех начальных состояний $x_0\in R^n$, из которых оно управляемо в терминальное множество $M=M(t)$ на некотором конечном отрезке времени T.

Пусть $X(t_0,t_1,x_0,F)$ – множество достижимости дифференциального включения (1) из начальной точки $x_0\in R^n$ в момент времени $t_1>t_0$, т.е. множество всевозможных точек $x_1\in R^n$, для которых существуют траектории $x=x(t), t\in T=[t_0,t_1]$, такие, что $x(t_0)=x_0$ и $x(t_1)=x_1$.

Из определения 1 ясно, что точка $x_0 \in R^n$ является точкой MT – управляемости дифференциального включения (1) тогда и только тогда, когда существует $t_1 > t_0$ такой, что $X(t_0, t_1, x_0, F) \cap M(t_1) \neq \varnothing$.

Таким образом, для изучения свойства множества M – управляемости дифференциального включения (1) следует изучить множеств вида

$$K(t_0, t_1, M, F) = \{\xi \in R^n : X(t_0, t_1, \xi, F) \cap M(t_1) \neq \varnothing\}, t_1 > t_0.$$

Ясно, что свойства последнего зависит от структуры и топологических свойств терминального множества $M = M(t)$ и многозначного отображения $F = F(t, x)$.

Пусть $F(t, x) = A(t)x + B(t)\ \forall (t, x) \in R^1 \times R^n$, где $A = A(t)$ – $n \times n$-матрица, $B = B(t)$ – многозначное отображение. Тогда получим линейное дифференциальное включение.

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t). \tag{2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие условия: 1) элементы матрицы $A(t)$ измеримы на любом $T = [t_0, t_1] \subset [t_0, +\infty]$ и $\| A(t) \| \leq a(t)$, где $a(\cdot) \in L_1(T)$; 2) при каждом $t \geq t_0$ множества $B(t) \subset R^n$ компактны и многозначное отображение $t \to B(t)$ измеримо на произвольном отрезке $T = [t_0, t_1] \subset [t_0, +\infty]$ и $\| B(t) \| \leq b(t)$, где $b(\cdot) \in L_1(T)$. Относительно терминального множества $M = M(t), t \geq t_0$, будем предполагать, что оно выпуклый компакт и непрерывно зависит от времени $t \geq t_0$. При изучении свойства множества M – управляемости дифференциального включения (2) будем использовать результаты теории многозначных отображений и теории дифференциальных включений.

Используем следующие обозначения для дифференциального включения (2): $K(t_0, t_1, M, A, B)$ –множество MT – управляемости при заданном терминальном множестве $M = M(t), t \geq t_0$; $W(M, A, B)$ – множество M – управляемости; $W_0(A, B)$ – множество нуль-управлямости.

Обозначим через $X(t_0, t_1, \xi, A, B)$ множество достижимости дифференциального включения (2) для начальной точки $\xi \in R^n$ в момент времени $t_1 > t_0$. Из приведенных определений ясно, что

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = \{\xi \in R^n : X_T(t_1, \xi, A, B) \cap M(t_1) \neq \varnothing\},$$

$$W(M, A, B) = \bigcup_{t_1 > t_0} K(t_0, t_1, M, A, B), W_0(A, B) = \bigcup_{t_1 > t_0} K_0(t_0, t_1, A, B).$$

Известно[8], что для множества $X(t_0, t_1, \xi, A, B)$ справедлива формула

$$X(t_0, t_1, \xi, A, B) = \Phi(t, t_0)\xi + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)d\tau, \tag{3}$$

где $\Phi(t, \tau)$ – фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = A(t)x,\ t \in T$. Из этой формулы и свойств интеграла от многозначных отображений легко следует, что множество $X(t_0, t_1, \xi, A, B)$ является выпуклым компактом из R^n.

РЕЗУЛЬТАТЫ

В изучении свойства множества управляемости дифференциального включения (2) будем воспользоваться представлением множества MT-управляемости через параметры системы с помощью интеграла от многозначного отображения.

Теорема 1. Множество $K(t_0,t_1,M,A,B)$ представимо формулой

$$K(t_0,t_1,M,A,B) = -\int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0,t)B(t)dt + \Phi_A(t_0,t_1)M(t_1) \tag{4}$$

Доказательство. Соотношение $X_T(t_1,\xi,A,B)\cap M(t_1)\neq\varnothing$ равносильно включению $0\in X_T(t_1,\xi,A,B)-M(t_1)$. Поэтому

$$K(t_0,t_1,\xi,A,B) = \{\xi\in R^n : 0\in X_T(t_1,\xi,A,B)-M(t_1)\}. \tag{5}$$

Используя формулу (3) получим:

$$K(t_0,t_1,M,A,B) = \left\{\xi\in R^n : 0\in \Phi_A(t_1,t_0)\xi + \int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_1,t)B(t)dt - M(t_1)\right\} =$$

$$= \left\{\xi\in R^n : -\Phi_A(t_1,t_0)\xi \in \int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_1,t)B(t)dt - M(t_1)\right\}. \tag{6}$$

Соотношение

$$-\Phi_A(t_1,t_0)\xi \in \int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_1,t)B(t)dt - M(t_1)$$

эквивалентно включению

$$\xi \in -\Phi_A^{-1}(t_1,t_0)\left[\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_1,t)B(t)dt - M(t_1)\right]. \tag{7}$$

В силу свойств фундаментальной матрицы, имеем:

$$\Phi_A^{-1}(t_1,t_0) = \Phi_A(t_0,t_1),\ \Phi_A(t_0,t_1)\Phi_A(t_1,t) = \Phi_A(t_0,t).$$

Учитывая эти равенства, соотношение (7) запишем в виде:

$$\xi \in -\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt + \Phi_A(t_0,t_1)M(t_1).$$

Теперь, нетрудно заметить, что формула (6) принимает вид (4). Теорема доказана.

Следствие 1. Если $M(t_1)$ – выпуклый компакт, то $K(t_0,t_1,M,A,B)$ также является выпуклым компактом из R^n. Если множества $M(t_1)$ и $convB(t)$ – строго выпуклы при $t\in T=[t_0,t_1]$, то $K(t_0,t_1,M,A,B)$ – строго выпуклое множество.

Пусть $X^0(t_0,t_1,A,B)$ – множество достижимости системы (2) для начального состояния $x_0=0$, т.е. $X^0(t_0,t_1,A,B) = X(t_0,t_1,0,A,B)$. Тогда учитывая формулу (3), из теоремы 1 получим что, справедлива формула

$$K(t_0,t_1,M,A,B) = \Phi_A(t_0,t_1)[X^0(t_0,t_1,A,-B)+M(t_1)]. \tag{8}$$

В случае, когда $M=\{0\}$, вместо $K(t_0,t_1,\{0\},A,B)$ напишем $K_0(t_0,t_1,A,B)$. Из формулы (4) ясно, что

$$K_0(t_0,t_1,A,B)=-\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt. \qquad (9)$$

Тогда, формулу (4) можно записать в таком виде:

$$K(t_0,t_1,M,A,B)=K_0(t_0,t_1,A,B)+\Phi_A(t_0,t_1)M(t_1). \qquad (10)$$

Если $A(t)\equiv A, t\in T=[t_0,t_1]$, то $\Phi_{-A}(t_1,t_0)=\Phi_A(t_0,t_1)$. Тогда из (9) получим:

$$K_0(t_0,t_1,A,B)=\Phi_A(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_1,t)(-B(t))dt=\Phi_{-A}(t_1,t_0)X^0(t_0,t_1,A,-B)$$

Следствие 2. Справедлива формула:

$$coK(t_0,t_1,M,A,B)=K(t_0,t_1,coM,A,B).$$

Следствие 3. Пусть $M(t)=\Phi_A(t,t_0)M_0$. Тогда

$$K(t_0,t_1,M,A,B)=K_0(t_0,t_1,A,B)+M_0,$$

$$W(M,A,B)=W_0(A,B)+M_0.$$

Теорема 2. Пусть $A(t)\equiv A,\ B(t)\equiv B$ при $t\in T=[t_0,t_1]$. Тогда:

$$K(t_0,t_1,M,A,B)=\bigcup_{\xi\in M(t_1)}X(t_0,t_1,\xi,-A,-B). \qquad (11)$$

Доказательство. Если $A(t)\equiv A$, то $\Phi_A(t,\tau)=e^{A(t-\psi)}$ и, поэтому, $\Phi_{-A}(t,\tau)=\Phi_A(\tau,t)$. Тогда, используя формулу (1.2.7), легко можно убедиться, что справедливо следующее представление:

$$\bigcup_{\xi\in M(t_1)}X(t_0,t_1,\xi,-A,-B)=\Phi_A(t_0,t_1)M(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t,t_1)Bdt. \qquad (12)$$

Поскольку $\Phi_A(t,\tau)=e^{A(t-\psi)}$, то имеет место равенство $\Phi_A(t_1+t_0-s,t_1)=\Phi_A(t_0,s)$ $\forall s\in[t_0,t_1]$. Учитывая это и сделав замену переменных $s=t_1+t_0-t$ в интеграле равенства (12), получим:

$$\bigcup_{\xi\in M(t_1)}X(t_0,t_1,\xi,-A,-B)=\Phi_A(t_0,t_1)M(t_1)-\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,s)Bds.$$

В силу теоремы 1 правая часть последнего равенства есть множество $K(t_0,t_1,M,A,B)$. Итак, справедлива формула (11), т.е. теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $t_0<t_1<t_2$, множества $M(t_1)$ и $M(t_2)$– выпуклые компакты. Тогда соотношение

$$K(t_0,t_2,M,A,B)\subset K(t_0,t_1,M,A,B) \qquad (13)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$K(t_1,t_2,M,A,B)\subset M(t_1). \qquad (14)$$

Доказательство. В самом деле, если имеет место соотношение (13), то учитывая (4), его напишем так:

$$-\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt+\Phi_A(t_0,t_1)K(t_1,t_2,M,A,B)\subset-\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt+\Phi_A(t_0,t_1)M(t_1). \qquad (15)$$

Теперь, используя выпуклост и компактность множества (9), имеем:

$$\Phi_A(t_0,t_1)K(t_1,t_2,M,A,B)\subset\Phi_A(t_0,t_1)M(t_1)\,. \tag{16}$$

Следовательно, имеет место (14).

Обратно, если $K(t_1,t_2,M,A,B)\subset M(t_1)$, то ясно, что справедливо соотношение (16) и далее, получим (15), т.е. имеет место (13).

Теорема 4. Пусть $M(t)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)M_i(t)$, $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)=1,\ \alpha_i(t)\ge 0, i=\overline{1,k}, t\ge t_0$. Тогда:

$$K(t_0,t_1,M,A,B)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t_1)K(t_0,t_1,M_i,A,B)\,. \tag{17}$$

Доказательство. Пологая в формуле (4) $M(t)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)M_i(t)$, имеем:

$$K(t_0,t_1,M,A,B)=-\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt+\Phi_A(t_0,t_1)\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t_1)M_i(t_1)\,.$$

Так как интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt$$

является выпуклым компактом и $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t)=1,\ \alpha_i(t)\ge 0, i=\overline{1,k}$, то

$$\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt=(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t_1))\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt\,.$$

Следовательно,

$$K(t_0,t_1,M,A,B)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t_1)[-\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt]+\Phi_A(t_0,t_1)\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t_1)M_i(t_1)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(t_1)[-\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt+\Phi_A(t_0,t_1)M_i(t_1)].$$

Теперь, используя формулу (4), отсюда получим требуемое (17).

Теорема 5. Пусть $B(t)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i B_i(t)$, где $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1,\ \alpha_i\ge 0, i=\overline{1,k}$ и множество $M(t_1)$ выпукло. Тогда:

$$K(t_0,t_1,M,A,B)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i K(t_0,t_1,M,A,B_i)\,. \tag{18}$$

Доказательство. В силу выпуклости множества $M(t_1)$ справедливо равенство

$$(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i)\Phi_A(t_0,t_1)M(t_1)=\sum_{i=1}^{k}\left(\alpha_i\Phi_A(t_0,t_1)M(t_1)\right)$$

Теперь, используя формулу (4), имеем:

$$K(t_0,t_1,M,A,B)=-\int_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)\sum_{i=1}^{k}\alpha_i B_i(t)dt+\sum_{i=1}^{k}\left(\alpha_i\Phi_A(t_0,t_1)M(t_1)\right)=$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0,t) B_i(t) dt + \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i \Phi_A(t_0,t_1) M(t_1) \right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0,t) B_i(t) dt + \Phi_A(t_0,t_1) M(t_1) \right] = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i K(t_0,t_1,M,A,B_i) .$$

т.е. имеет место равенство (18).

ОБСУЖДЕНИЕ

Из полученных результатов следует особо отметить теорему 1, в которой дана формула представления (4) для множества $K(t_0,t_1,M,A,B)$. Используя эту формулу, изучены свойства множества $K(t_0,t_1,M,A,B)$, дающее представление об его структуре. Теорема 2 устанавливает связь между множеством *MT*-управлямости системы (2) и множеством достижимости соответствующей системы $\dot{x} \in -A(t)x - B(t)$ при условии стационарности дифференциального включения (2),т.е. когда $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$. Теорема 3 и дает представление о динамике множества $K(t_0,t_1,M,A,B)$ в зависимости от времени $t \geq t_0$. Теореме 4 и 5 показывают выпуклый характер зависимости множества МТ-управляемости от переменного терминального множества $M(t)$ и многозначнонго отображеня $B(t)$.Изученные свойства множества $K(t_0,t_1,M,A,B)$ позволяют выяснения структуры множества М-управляемости дифференциальных включений.

ВЫВОДЫ

В работе исследована проблема управляемости для математической модели системы управления в виде линейного дифференциального включения. Рассмотрен случай, когда терминальное множество подвижное, т.е. зависит от времени: $M = M(t)$. Для этой модели динамической системы введено понятие множества *M*-управляемости. Изучены структурные и топологические свойства *M*-управляемости.

REFERENCES

1. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление. Труды математического института АН СССР. – 1985. –169. – с. 194-252.
2. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д.,Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. –М.: КомКнига, 2005.
3. Половинкин Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. –М.: Физматлит, 2015.
4. Aseev S. M., An optimal control problem for a differential inclusion with a phase constraint. Smooth approximations and necessary optimality conditions, J. Math. Sci. (New York), vol. 103, № 6 (2001). pp. 670–685 .
5. Булгаков А.И. Функционально-дифференциальные включения с невыпуклой правой частью // Дифференциальные уравнения. – 1990. –26, №11. – с. 1872-1878.
6. Дочев Д. Тр., Байнов Д.Д. О существовании решений одного класса многозначных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. –Укр. Матем. журн.- 1978, т. 30, № 5.- с.659-669.

7. Plotnikov A.V., Komleva T.A. Piecewise constant controlled linear fuzzy differential inclusions. Universal Journal of Applied Mathematics. 2013, vol.1, №2.- p. 39-43.
8. Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. Монография. Lambert Academic Publishing, 2019.
9. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
10. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Методы функционального анализа. Минск: Изд-во БГУ, 1973.
11. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.
12. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление линейными системами. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1982.
13. O'Connor D.A., Tarn T.J. On the function space controllability of linear neutral systems. SIAM J. Control and Optimiz. 1983, v.21, No 2. P. 306-329.
14. Margheri A. On the 0-local controllability of a linear control system. J. Opt. Theory and Appl., 1990, vol. 66, No 1. –p. 61-69.
15. Благодатских В.И. О локальной управляемости дифференциальных включений. Дифференциальные уравнения, 1973, Т.9, № 2. –с. 361-362.
16. Otakulov S., Rahimov B. Sh. About the property of controllability an ensamble of trajectories of differential inclusion. International Enjineering Journal for Research & Development. Vol.5, issue 4, 2020. pp.366-374.
17. Отакулов С., Рахимов Б.Ш. Задача управления ансамблем траекторий дифференциального включения с параметрами при условии подвижности терминального множества. Научный вестник СамГУ. Серия точных наук, 2021, №1. –с. 59-65.
18. Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. About conditions of controllability of ensamble trajectories of differential inclusion with delay. International Journal of Statistics and Applied Mathematics, 2020, v.5, issue 3.–p.59–65.
19. Otakulov S., Rahimov B. Sh. Haydarov T.T. On the property of relative controllability for the model of dynamic system with mobile terminal set. AIP Conference Proceedings, 2022, 2432, 030062. -p. 1–5.
20. Otakulov S., Rahimov B. Sh. On the structural properties of the reachability set of a differential inclusion. Proceedings of International Conference on Research Innovations in Multidisciplinary Sciences, March 2021. New York, USA. -p. 150-153.
21. Отакулов С., Рахимов Б.Ш. О свойствах множества управляемости динамической системы. Научный вестник СамГУ. Серия точных наук, 2022, №1. –с. 31–36.