О РЕШЕНИИ НЕКОТОРОГО ЛИНЕЙНОГО ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Соатов Улугбек Абдукадирович
Доцент ДжизПИ

https://doi.org/10.5281/zenodo.6930859

Аннотация. *В этой статье изучен вопрос о разрешимости некоторого линейного интегрального уравнения с частными интегралами в пространстве непре-рывных на [a,b]³ функций, доказано существование и единственность решения рассматриваемого уравнения с вырожденными ядрами при* $\lambda_i = -1, i = 1,2,3.$ *и найдена точная формула решения уравнения.*

Ключевые слова: *частично интегральное уравнение, ядро, функция трех переменных, интегральное уравнение Фредгольма, детерминант, единственное решение, метод Фредгольма, точная формула решения.*

ON THE SOLUTION OF SOME LINEAR PARTIALLY INTEGRAL EQUATION

Abstract. *In this article, we study the question of the solvability of a certain linear integral equation with partial integrals in the space of functions continuous on [a,b]³, prove the existence and uniqueness of a solution of the considered equation with degenerate kernels at* $\lambda_i = -1, i = 1,2,3$ *and find an exact formula for solving the equation.*

Keywords: *partial integral equation, kernel, function of three variables, Fredholm integral equation, determinant, unique solution, Fredholm method, exact solution formula.*

ВВЕДЕНИЕ

Теория интегральных уравнений Фредгольма возникла при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В дальнейшем эта теория развивалась и нашла широкое применение во многих задачах математической физики. В частности, решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений или более общее для эллиптических дифференциальных уравнений сводится к интегральным уравнениям. В этих задачах возмущение как правило компактный оператор или задача сводится операторным уравнениям с компактными возмущениями. Однако, исследование спектральных свойств, в частности связанных состояний, многочастичных операторов квантовой механики и физики твердого тела приводят к частично интегральным уравне-ниям. Например, задача для уравнения собственных функций четырех-частичного оператора Шредингера с парными взаимодействиями [1] приводит к решению интегральных уравнений с частными интегралами для функций трех переменных. В отличие от “классического” случая в этих уравнениях возмущение не компактный оператор. Поэтому решение этих уравнений существенно усложняется.

Вопрос о существовании решения интегрального уравнения с частными интегралами для функций двух переменных рассматривался в работах Абдус Салама [2], Стефана Фенье [3], О.П.Околелова [4] и других авторов, для функций трех переменных рассматривался в работах [5-8], а в связи с исследо-ванием спектральных свойств многочастичных операторов изучался в книгах С.П.Меркурьева, Л.Д.Фаддеева [9] и С.Альбеверио, Ф.Гестези, З.Хеэг-Крон, Х.Хольдена [10] и в работах С.Н.Лакаева [11-12].

В этой статье подробно рассмотрена проблема существования и един-ственности решения частично интегрального уравнения для функций трех переменных с одномерными вырожденными ядрами в пространстве непре-рывных на $[a,b]^3$ функций. Доказан аналог теоремы Фредгольма для рассматри-ваемого частично интегрального уравнения.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Рассмотрим интегральное уравнение с частными интегралами

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1,x_2,x_3)+\lambda_1\int_a^b K_1(x_1,t_1)\varphi(t_1,x_2,x_3)dt_1+\\&+\lambda_2\int_a^b K_2(x_2,t_2)\varphi(x_1,t_2,x_3)dt_2+\lambda_3\int_a^b K_3(x_3,t_3)\varphi(x_1,x_2,t_3)dt_3=f(x_1,x_2,x_3)\end{aligned} \tag{1}$$

И соответствующее ему однородное уравнение

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1,x_2,x_3)+\lambda_1\int_a^b K_1(x_1,t_1)\varphi(t_1,x_2,x_3)dt_1+\\&+\lambda_2\int_a^b K_2(x_2,t_2)\varphi(x_1,t_2,x_3)dt_2+\lambda_3\int_a^b K_3(x_3,t_3)\varphi(x_1,x_2,t_3)dt_3=0\end{aligned} \tag{2}$$

где ядра $K_i(x_i,t_i),\ i=1,2,3$ и свободный член $f(x_1,x_2,x_3)$ - данные непрерывные функции определенные на $[a,b]^2$ и $[a,b]^3$ соответственно; $\varphi(x_1,x_2,x_3)$- неизвестная функция, $\lambda_i,\ i=1,2,3$ - параметры.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть $K_i(x_i,t_i)=\psi_i(x_i)\hat{\psi}_i(t_i),\lambda_i=-1,\quad i=1,2,3$ и детерминанты

$$d_i=1+\int_a^b \psi_i(t)\hat{\psi}_i(t)dt\neq 0, i=1,2,3;\ \Delta_\alpha=d_\beta+d_\gamma-1\neq 0,\ \alpha\neq\beta\neq\gamma,\alpha,\beta,\gamma=1,2,3.$$

Тогда а) если детерминант $\Delta=d_1+d_2+d_3-2\neq 0,$ то линейное частично интегральное уравнение (1) для любой функции $f(x_1,x_2,x_3)$ имеет единствен-ное непрерывное решение выражаемое формулой

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)=f(x,y,z)-&\left\{\int_a^b\frac{K_1(x_1,t_1)f(t_1,x_2,x_3)}{d_1}dt_1+\right.\\&\left.+\int_a^b\frac{K_2(x_2,t_2)f(x_1,t_2,x_3)}{d_2}dt_2+\int_a^b\frac{K_3(x_3,t_3)f(x_1,x_2,t_3)}{d_3}dt_3\right\}+\\&+\frac{d_1+d_2}{d_1d_2\Delta_3}\int_a^b\int_a^b K_1(x_1,t_1)K_2(x_2,t_2)f(t_1,t_2,x_3)dt_1dt_2+\\&+\frac{d_1+d_3}{d_1d_3\Delta_2}\int_a^b\int_a^b K_1(x_1,t_1)K_3(x_3,t_3)f(t_1,x_2,t_3)dt_1dt_3+\end{aligned}$$

$$+\frac{d_2+d_3}{d_2d_3\Delta_1}\int_a^b\int_a^b K_2(x_2,t_2)K_3(x_3,t_3)f(x_1,t_2,t_3)dt_2dt_3+$$

$$+\frac{C}{(d_1d_2d_3)^2\,\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta}\int_a^b\int_a^b\int_a^b K_1(x_1,t_1)K_2(x_2,t_2)K_3(x_3,t_3)f(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3, \qquad (3)$$

где $C=(1+\Delta)\left[(d_1d_2+d_1d_3+d_2d_3-d_1d_2d_3)\Delta_1\Delta_2\Delta_3-d_1d_2d_3(\Delta_1\Delta_2+\Delta_1\Delta_3+\Delta_2\Delta_3)\right]-$
$-\left(d_1d_2\Delta_3+d_1d_3\Delta_2+d_2d_3\Delta_1+d_1d_2d_3\right)\left[d_1d_2d_3\Delta-(d_1-1)(d_2-1)(d_3-1)(1+\Delta)\right];$

б) если детерминант $\Delta=d_1+d_2+d_3-2=0$, тогда соответствующее к урав-нению (1), однородное интегральное уравнение (2) с ядрами $K_i(x_i,t_i)=\psi_i(x_i)\hat{\psi}_i(t_i)$, $i=1,2,3$ имеет ненулевое решение.

Доказательство. а) По предположению $K_i(x_i,t_i)=\psi_i(x_i)\hat{\psi}_i(t_i), \lambda_i=-1,\ i=1,2,3$ тогда уравнение (1) примет следующий вид

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)+\psi_1(x_1)\int_a^b\hat{\psi}_1(t_1)\varphi(t_1,x_2,x_3)dt_1+\psi_2(x_2)\int_a^b\hat{\psi}_2(t_2)\varphi(x_1,t_2,x_3)dt_2+$$

$$+\psi_3(x_3)\int_a^b\psi_3(x_3)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(x_1,x_2,t_3)dt_3=f(x_1,x_2,x_3). \qquad (4)$$

Считая, $\int_a^b\hat{\psi}_2(t_2)\varphi(x_1,t_2,x_3)dt_2$ и $\int_a^b\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(x_1,x_2,t_3)dt_3$ известными в уравнении (4) мы получим следующее частично интегральное уравнение

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)+\psi_1(x_1)\int_a^b\hat{\psi}_1(t_1)\varphi(t_1,x_2,x_3)dt=h(x_1,x_2,x_3)\ . \qquad (5)$$

Здесь

$$h(x_1,x_2,x_3)=f(x_1,x_2,x_3)-\psi_2(x_2)\int_a^b\hat{\psi}_2(t_2)\varphi(x_1,t_2,x_3)dt_2-\psi_3(x_3)\int_a^b\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(x_1,x_2,t_3)dt_3. \quad (6)$$

Фиксируя переменных x_2,x_3 уравнение (5) можно привести к виду

$$\varphi_{x_2x_3}(x_1)+\psi_1(x_1)\int_a^b\hat{\psi}_1(t_1)\varphi_{x_2x_3}(t_1)dt_1=h_{x_2x_3}(x_1). \qquad (7)$$

Уравнение (7) есть линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода [13]. Ядро этого уранения вырождена, вырождение ранга один. Решаем это уравнение методом Фредгольма. Пусть $\alpha_1(x_2,x_3)=\int_a^b\hat{\psi}_1(t_1)\varphi_{x_2x_3}(t_1)dt_1$, тогда имеем $\varphi_{x_2x_3}(x_1)=h_{x_2x_3}(x_1)-\psi_1(x_1)\alpha_1(x_2,x_3)$, с помощью которого найдем $\alpha_1(x_2,x_3)$:

$$\alpha_1(x_2,x_3)=\int_a^b\hat{\psi}_1(t_1)h_{x_2x_3}(t_1)dt_1-\alpha_1(x_2,x_3)\int_a^b\psi_1(t_1)\hat{\psi}_1(t_1)dt_1,$$

$$\alpha_1(x_2,x_3)\left[1+\int_a^b\psi_1(t_1)\hat{\psi}_1(t_1)dt_1\right]=\int_a^b\hat{\psi}_1(t_1)h_{x_2x_3}(t_1)dt_1.$$

По условию теоремы $d_1 = 1 + \int_a^b \psi_1(t_1)\hat{\psi}_1(t_1)dt_1 \neq 0$, поэтому $\alpha_1(x_2,x_3) = \frac{1}{d_1}\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)h_{x_2x_3}(t_1)dt_1$

И, уравнение (7) имеет единственное решение для любой правой части в виде

$$\varphi_{x_2x_3}(x_1) = h_{x_2x_3}(x_1) - \frac{\psi_1(x_1)}{d_1}\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)h_{x_2x_3}(t_1)dt_1 ,$$

То есть при каждом значении переменных x_2, x_3 получим

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = h(x_1,x_2,x_3) - \frac{\psi_1(x_1)}{d_1}\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)h(t_1,x_2,x_3)dt_1 ,$$

которая является решением уравнения (5). Теперь подставляя вместо $h(x_1,x_2,x_3)$ её выражение из (6) мы приходим частично интегральному уравнению вида

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) + \psi_2(x_2)\int_a^b \hat{\psi}_2(t_2)\varphi(x_1,t_2,x_3)dt_2 = g(x_1,x_2,x_3), \qquad (8)$$

где

$$g(x_1,x_2,x_3) = f(x_1,x_2,x_3) - \frac{\psi_1(x_1)}{d_1}\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)f(t_1,x_2,x_3)dt_1 -$$

$$-\psi_3(x_3)\int_a^b \hat{\psi}_3(t_3)\varphi(x_1,x_2,t_3)dt_3 + \frac{\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)}{d_1}\int_a^b\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_2(t_2)\varphi(t_1,t_2,x_3)dt_1dt_2 +$$

$$+\frac{\psi_1(x_1)\psi_3(x_3)}{d_1}\int_a^b\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(t_1,x_2,t_3)dt_1dt_3 .$$

Далее заметим, что уравнение (8) есть аналог уравнения (5). Поэтому при фиксированных переменных x_1, x_3 мы имеем линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi_{x_1x_3}(x_2) + \psi_2(x_2)\int_a^b \hat{\psi}_2(t_2)\varphi_{x_1x_3}(t_2)dt_2 = g_{x_1x_3}(x_2), \quad \text{где} \qquad (9)$$

$$g_{x_1x_3}(x_2) = f_{x_1x_3}(x_2) - \frac{\psi_{1x_1}}{d_1}\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)f_{x_3}(t_1,x_2)dt_1 - \psi_{3x_3}\int_a^b \hat{\psi}_3(t_3)\varphi_{x_1}(x_2,t_3)dt_3 +$$

$$+\frac{\psi_{1x_1}\psi_2(x_2)}{d_1}\int_a^b\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_2(t_2)\varphi_{x_3}(t_1,t_2)dt_1dt_2 + \frac{\psi_{1x_1}\psi_{3x_3}(x_3)}{d_1}\int_a^b\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(t_1,x_2,t_3)dt_1dt_3 \quad 10)$$

Уравнение (9) есть аналог уравнения (7), разрешая его имеем единственное решение для любой $g_{x_1x_3}(x_2)$ вида

$$\varphi_{x_1x_3}(x_1) = g_{x_1x_3}(x_2) - \frac{\psi_2(x_2)}{d_2}\int_a^b \hat{\psi}_2(t_2)g_{x_1x_3}(t_2)dt_2 ,$$

то есть при каждом значении переменных x_1, x_3 получим

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = g(x_1,x_2,x_3) - \frac{\psi_2(x_2)}{d_2}\int_a^b \hat{\psi}_2(t_2)g(x_1,t_2,x_3)dt_2 .$$

(где $d_2=1+\int\limits_a^b \psi_2(t_2)\hat{\psi}_2(t_2)dt_2 \neq 0$ по условию теоремы), которая является решением уравнения (9) (также решение уравнения (8)). Теперь подставляя вместо $g(x_1,x_2,x_3)$ её выражение из (10) мы приходим частично интегральному уравнению

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)+\psi_3(x_3)\int\limits_a^b \hat{\psi}_3(t_3)\varphi(x_1,x_2,t_3)dt_3=u(x_1,x_2,x_3). \qquad (11)$$

Здесь $u(x_1,x_2,x_3)= f(x_1,x_2,x_3)-\frac{\psi_1(x_1)}{d_1}\int\limits_a^b \hat{\psi}_1(t_1)f(t_1,x_2,x_3)dt_1-\frac{\psi_2(x_2)}{d_2}\int\limits_a^b \hat{\psi}_2(t_2)g(x_1,t_2,x_3)dt_2$

$$+\frac{\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)}{d_1d_2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_2(t_2)\varphi(t_1,t_2,x_3)dt_1dt_2+\frac{\psi_1(x_1)\psi_3(x_3)}{d_1d_3}\int\limits_a^b\int\limits_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(t_1,x_2,t_3)dt_1dt_3$$

$$+\frac{\psi_2(x_1)\psi_3(x_3)}{d_1}\int\limits_a^b\int\limits_a^b \hat{\psi}_2(t_2)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(x_1,t_2,t_3)dt_1dt_3+$$

$$+\frac{\psi_1(x_1)\psi_2(x_1)\psi_3(x_3)}{d_1d_2d_3}\int\limits_a^b\int\limits_a^b\int\limits_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_2(t_2)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3.$$

Разрешая уравнение (11) аналогично как изложенные выше получим его решение при $d_3=1+\int\limits_a^b \psi_3(t_3)\hat{\psi}_3(t_3)dt_3 \neq 0$ в виде

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=u(x_1,x_2,x_3)-\frac{\psi_3(x_3)}{d_2}\int\limits_a^b \hat{\psi}_2(t_2)u(x_1,x_2,t_3)dt_3$$

или

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)-\frac{\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)}{d_1d_2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_2(t_2)\varphi(t_1,t_2,x_3)dt_1dt_2=\Phi(f,\varphi,x_1,x_2,x_3), \qquad (11)$$

Здесь $\Phi(f,\varphi,x_1,x_2,x_3)=F(f,x_1,x_2,x_3)+\frac{\psi_1(x_1)\psi_3(x_3)}{d_1d_3}\int\limits_a^b\int\limits_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(t_1,x_2,t_3)dt_1dt_3+$

$$+\frac{\psi_2(x_1)\psi_3(x_3)}{d_1}\int\limits_a^b\int\limits_a^b \hat{\psi}_2(t_1)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(x_1,t_2,t_3)dt_1dt_3-$$

$$-\frac{2\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3)}{d_1d_2d_3}\int\limits_a^b\int\limits_a^b\int\limits_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_2(t_2)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2,$$

где $F(f,x_1,x_2,x_3)$ выражается через $f(x_1,x_2,x_3)$ и её интегралы.

ОБСУЖДЕНИЕ

Уравнение (11) есть частично интегральное уравнение, которое при фиксированном x_3 является уравнением Фредгольма с вырожденным ядром и легко разрешимо. Решая его аналогичным путем как решение уравнения (5) и последующими повторениями, фиксированием последовательно переменных $x_3(x_2,x_1)$, при условиях

$\Delta_\alpha = d_\beta + d_\gamma - 1 \neq 0$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma, \alpha, \beta, \gamma = 1,2,3$, наконец, приходим к полному интегральному уравнению Фредгольма второго рода следующего вида

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \mathrm{G}(f,x_1,x_2,x_3) +$$
$$+\frac{1-d_1-d_2-d_3}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3)\int_a^b\int_a^b\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_2(t_2)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2 . \quad (12)$$

Здесь $\mathrm{G}(f,x_1,x_2,x_3)$ выражается через данной функции $f(x_1,x_2,x_3)$ и её интегралы.

Теперь, вводя обозначение $C_1 = \int_a^b\int_a^b\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_2(t_2)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2$ и решая уравнение (12) методом Фредгольма получим его решение в виде

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \mathrm{G}(f,x_1,x_2,x_3) +$$
$$+\frac{1-d_1-d_2-d_3}{d_1d_2d_3\Delta}\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3)\int_a^b\int_a^b\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_2(t_2)\hat{\psi}_3(t_3)\mathrm{G}(f,t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 , \quad (13)$$

где по условию теоремы $\Delta = d_1 + d_2 + d_3 - 2 \neq 0$. Подставляя выражение функции $\mathrm{G}(f,x_1,x_2,x_3)$ через данной функции $f(x_1,x_2,x_3)$ и её интегралы в (13) окончательно получим решение вида (3) рассматриваемого уравнения (1).

Таким образом доказана часть а) теоремы. б) При выполнении условий теоремы можно доказать, что рассматриваемое однородное уравнение (2) эквивалентно к полному однородному интегральному уравнению вида $\varphi(x_1,x_2,x_3) =$

$$\frac{1-d_1-d_2-d_3}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3)\int_a^b\int_a^b\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_2(t_2)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3 . \quad (14)$$

По теореме Фредгольма [13] при условии $\Delta = d_1 + d_2 + d_3 - 2 = 0$ уравнение (14) имеет ненулевое решение. Полагая, что

$$C = \frac{1-d_1-d_2-d_3}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}\int_a^b\int_a^b\int_a^b \hat{\psi}_1(t_1)\hat{\psi}_2(t_2)\hat{\psi}_3(t_3)\varphi(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3$$

имеем

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = C\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3) .$$

Подставляя это выражение функции $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ в уравнение (2) получим

$$C\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3)\left[1+\int_a^b \psi_1(t_1)\hat{\psi}_1(t_1)dt_1 + \int_a^b \psi_2(t_2)\hat{\psi}_2(t_2)dt_2 + \int_a^b \psi_3(t_3)\hat{\psi}_3(t_3)dt_3\right] =$$
$$= C\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3)\left[1+(d_1-1)+(d_2-1)+(d_3-1)\right] =$$
$$= C\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3)(d_1+d_2+d_3-2=0) = 0 .$$

Это означает, что

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = C\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3) , \; C \neq 0$$

Есть ненулевое решение однородного уравнения (2) (есть непрерывное решение уравнения (13), эквивалентного к уравнению (2)), так как по условию теоремы $\Delta = d_1 + d_2 + d_3 - 2 = 0$.

Теорема доказана.

Из доказанной нами теоремы вытекает для случая $f = 0$ следствие.

ВЫВОДЫ

Следствие. Если $K_i(x_i,t_i) = \psi_i(x_i)\hat{\psi}_i(t_i)$, $\lambda_i = -1$, $d_i = 1 + \int_a^b \psi_i(t)\hat{\psi}_i(t)dt \neq 0$, $i = 1,2,3$; $\Delta_\alpha = d_\beta + d_\gamma - 1 \neq 0$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma, \alpha, \beta, \gamma = 1,2,3$ и $\Delta = d_1 + d_2 + d_3 - 2 \neq 0$, то однородное интегральное уравнение с частными интегралами (2) имеет только нулевое решение $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$.

REFERENCES

1. С.Альбеверио, С.Н.Лакаев, Ж.И.Абдуллаев, Конечность дискретного спектра четырех-частичного оператора на решетке. Функциональный анализ и его приложения. 36 (2002), № 3, 56-60.
2. Abdus Salam, Fredholm Solution of Partial Integral Equations.oc. Cambridge Philos.Soc. 49 (1952), 213-217.
3. Stefan Fenyo, Beitrag zur Theorie der Linearen partiellen Integral gleichungen. Publs.mat., (1955), No.1,2, 98-103.
4. Околелов О.П., Аналог метода прямых для решения двумерных интегральных уравнений. Уч. записки Иркутский государственный педагогический институт, 1967, вып 34, 85-93.
5. Lakaev S.N., Soatov U., Solution of partial integral equations for three variable functions, ICSTM-96, Samarkand, 1996, c. 62.
6. Лакаев С.Н., Соатов У.А., О решении частично интегрального уравнения для функций трех переменных, Докл. АН РУз, Ташкент, 1997, № 11, 8-10. 6.
7. У.А.Соатов, Необходимое и достаточное условия существования решения некоторого частично интегрального уравнения с вырожденным ядрами, Рукопись депонирована в ГФНТИ ГКНТ РУз 1997г. № 2677-97, 29с.
8. ON THE SOLUTION OF LINEAR PARTIALLY INTEGRAL EQUATION IN THE SPASE $L_2([a,b]^3)$. Mental Enlightenment Scientific - Methodological Journal, Volume 2021, Issue 1, Articl 5, 2-10-2021, https://uzjournals.edu.uz/tziuj. Part of the Education Commons. pp.40-49.
9. Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д. "Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц". Москва, "Наука", 1985.
10. Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон З., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. Москва, Мир. 1991.
11. Лакаев С.Н. О бесконечном числе трехчастичных связанных состояний системы трех квантовых решетчатых частиц. Теоретическая и математическая физика, 89 (1991), № 1, 94-104.

12. Лакаев С.Н. Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц. Функциональный анализ и его приложения, 27 (1993), вып.3, 15-28.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. «Элементы теории функций и функционального анализа» , 8-е издание, Москва, издательство ФИЗМАТЛИТ, 2012 г.