NOCHIZIQLI TEMPERATURAVIY JARAYONLARNI SAMARALI YECHISH METODI

Toyirov Akbar Xasanovich
Termiz davlat universiteti “Amaliy matematika va informatika” kafedrasi katta o‘qituvchisi, PhD
Yuldashev Shamsiddin Mamarajabovich
Termiz davlat universiteti “Amaliy matematika va informatika” kafedrasi o`qituvchisi, PhD

https://doi.org/10.5281/zenodo.6896575

Annotatsiya. *Chiziqsiz hususiy hosilali tenglamalar orasida eng ko‘p uchraydigani kvazichiziqli tenglamalar hisoblanadi. Hattoki, ushbu tenglamalar sistemasi uchun ham hozirda yetarlicha to‘liq nazariya mavjud emas, bunday masalalar yechimi uchun umumiy bo‘lgan mavjudlik va yagonalik teoremalari ham yo‘q. Kvazichiziqli tenglamalarni sonli yechish uchun asosan ayirmali metodlar yoki to‘r metodlari qo‘llaniladi. Ushbu metodlar hususiy hosilali kvazichiziqli tenglamalar yechimini topishni chiziqli algebraik tenglamalar yechimini topishga olib keladi.*

Kalit so‘zlar: *oshkormas iteratsiya sxemasi, iteratsiyalar soni, arifmetik amallar soni, to‘r qadamlari, chiziqli va chiziqlimas ayirmali sxema, issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti, kvazichiziqli tenglama, boshlang‘ich va chegaraviy shartlar.*

МЕТОД ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация. *Среди систем нелинейных уравнений с частным производными и наиболее часто встречающимся являются квазилинейные уравнения. Но даже и для этих систем в настоящее время нет доста точно полной теории, нет общих теорем существования и единственности решения задачи. Для численного решения квазилинейных уравнений в основном применяется.*

Ключевые слова: *неявная итерационная схема, число итераций, число слоев сетки, шаги сетки, линейные и нелинейные разностные схемы, коэффициент теплопроводности, квазилинейные уравнение, начальное и граничные условия.*

EFFECTIVE METHOD FOR SOLVING NONLINEAR TEMPERATURE PROCESSES

Abstract. *Among the systems of nonlinear partial differential equations, the most frequently encountered are quasilinear equations. But even for these systems at present there is no sufficiently complete theory, there are no general theorems on the existence and uniqueness of a solution to the problem. For the numerical solution of quasilinear equations, difference methods or the grid method are mainly used. It allows us to reduce the solution of a quasilinear partial differential equation to the solution of systems of linear algebraic equations.*

Keywords: *implicit iteration scheme, number of iterations, number of grid layers, grid steps, linear and nonlinear difference schemes, heat conductivity coefficient, quasilinear equation, initial and boundary conditions.*

KIRISH

Chiziqli bo‘lmagan va kvazichiziqli hususiy hosilali tenglamalarni yechishga mo‘ljallangan samarali hisoblash metodlarini yaratish, hisoblash texnologiyalari yo‘nalishidagi dolzarb masalalardan hisoblanadi. Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturasining chiziqli, kvadratik va kubik funksiyalari ko‘rinishida bo‘lganda ayirmali iteratsiya sxemalarini qo‘llab yechish muhim ahamiyatga ega.

Huddi shuningdek, qo‘llanilayotgan metodlarning samaradorligini arifmetik amallar soni bo‘yicha asoslash, metodlarning chiziqli bo‘lmagan parametrga bog‘liq ravishda arifmetik amallar soni bo‘yicha tadqiq etish ko‘zda tutiladi.

TADQIQOT MATERIALLARI VA METODOLOGIYASI

Chiziqli bo‘lmagan koeffitsientga ega bo‘lgan issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun quyidagi chegaraviy masalani qaraylik

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(k(u)\frac{\partial u}{\partial x})+f(u)\ ,0<x<1\,,0<t\le T, \qquad (1)$$

$$u(x,0)=u_0(x)\,, \qquad 0\le x\le 1, \qquad (2)$$

$$u(0,t)=\mu_1(t)\,,\quad u(1,t)=\mu_2(t),\quad 0\le t\le T, \qquad (3)$$

bunda $k(u)=k_0 u$ - issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning chiziqli bo‘lmagan funksiyasi bo‘lsin, $\sigma\ge 1$.

Differensial masala (1)-(3) qaralayotgan uzluksiz

$$\overline{D}=\{0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le T\}$$

sohada ayirmali to‘r kiritamiz

$$\overline{\omega}_{h\tau}=\left\{(x_i\,,t_j),\begin{array}{l} x_i=ih\,,i=0,1,2,...,\ N,\quad h=1/N,\\ t_j=j\tau\,,\,j=0,1,2,...\,,M\,,\tau=T/M\end{array}\right\}.$$

Ayirmali $\overline{\omega}_{h\tau}$ to‘rda differensial masalaga mos quyidagi ayirmali masalalarni qo‘yamiz [1]:

Oshkormas sxema:

$$\frac{\hat{y}_i-y}{\tau}=\frac{1}{h}\left[a_{i+1}(y)\frac{\hat{y}_{i+1}-\hat{y}_i}{h}-a_i(y)\frac{\hat{y}_i-\hat{y}_{i-1}}{h}\right]+f(y_i),\quad \begin{array}{l}0<i<N\ ,\\ 0\le j<M,\end{array}$$

$$y_i^0=u_0(x_i), \qquad 0\le i\le N, \qquad (4)$$

$$y_0^{j+1}=\mu_1(t_{j+1})\,,\qquad y_N^{j+1}=\mu_2(t_{j+1})\,, \qquad 0\le j<M.$$

Oshkormas iterativ sxema:

$$\frac{\hat{y}_i-y}{\tau}=\frac{1}{h}\left[a_{i+1}(\hat{y})\frac{\hat{y}_{i+1}-\hat{y}_i}{h}-a_i(\hat{y})\frac{\hat{y}_i-\hat{y}_{i-1}}{h}\right]+f(\hat{y}_i)\ ,\quad \begin{array}{l}0<i<N,\\ 0\le j<M,\end{array}$$

$$y_i^0=u_0(x_i)\ , \qquad 0\le i\le N, \qquad (5)$$

$$y_0^{j+1}=\mu_1(t_{j+1})\,,\qquad y_N^{j+1}=\mu_2(t_{j+1})\,, \qquad 0\le j<M.$$

Bu ayirmali masalalarni yechish uchun progonka metodiga olib kelinadi.

$$\hat{y}_i-\frac{\tau}{h}\left[a_{i+1}(y)\frac{\hat{y}_{i+1}-\hat{y}_i}{h}-a_i(y)\frac{\hat{y}_i-\hat{y}_{i-1}}{h}\right]=y_i+f(y_i)\tau;$$

$$\hat{y}_i-\frac{\tau}{h^2}a_{i+1}(y)\hat{y}_{i+1}+\frac{\tau}{h^2}a_{i+1}(y)\hat{y}_i+\frac{\tau}{h^2}a_i(y)\hat{y}_i-\frac{\tau}{h^2}a_i(y)\hat{y}_{i-1}=y_i+\tau f(y_i);$$

$$-\frac{\tau}{h^2}a_i(y)\hat{y}_{i-1}+(1+\frac{\tau}{h^2}(a_{i+1}(y)+a_i(y))\hat{y}_i-\frac{\tau}{h^2}a_{i+1}(y)\hat{y}_{i+1}=y_i+\tau f(y_i);$$

Endi hosil bo‘lgan tenglamani (-1) ga ko‘paytiramiz va quyidagiga ega bo‘lamiz

$$\frac{\tau}{h^2}a_i(y)\hat{y}_{i-1}-(1+\frac{\tau}{h^2}(a_{i+1}(y)+a_i(y))\hat{y}_i+\frac{\tau}{h^2}a_{i+1}(y)\hat{y}_{i+1}=-(y_i+\tau f(y_i));$$

Oshkormas sxema va oshkormas iterativ sxemada $\hat{y}_i=y_i^{j+1},\ y_i=y_i^j$ hamda $a_i(\vartheta)=a(\vartheta_{i-1},\vartheta_i)$ koeffitsientlar quyidagi formulalardan birortasi bilan hisoblanishi mumkin:

$$a_i(\vartheta)=0{,}5[k(\vartheta_{i-1})+k(\vartheta_i)],$$

$$a_i(\vartheta)=k\left(\frac{\vartheta_{i-1}+\vartheta_i}{2}\right),$$

$$a_i(\vartheta)=\frac{2k(\vartheta_{i-1})k(\vartheta_i)}{k(\vartheta_{i-1})+k(\vartheta_i)}.$$

Temperaturaviy to‘lqinni hisoblash aniqligi koeffitsientlar $a_i(\vartheta)$ ning qanday yo‘l bilan hisoblanishidan kuchli bog‘liq bo‘ladi.

Oshkormas sxema va oshkormas iterativ sxemalarni nazariy jihatdan taqqoslash [1] da amalga oshirilgan, hamda oshkormas iterativ sxema chiziqli bo‘lmaganligi sababli, uni yechish uchun quyidagi iteratsiya jarayonidan foydalanish maqsadga muvofiq ekanligi ta’kidlangan

$$\frac{\overset{(s+1)}{y}_i-y_i}{\tau}=\frac{1}{h}\left[a_{i+1}(\overset{(s)}{y})\frac{\overset{(s+1)}{y}_{i+1}-\overset{(s+1)}{y}_i}{h}-a_i(\overset{(s)}{y})\frac{\overset{(s+1)}{y}_i-\overset{(s+1)}{y}_{i-1}}{h}\right]+f(\overset{(s)}{y}_i),\quad \begin{array}{l}0<i<N,\\ 0\le s<3\ ,\\ 0\le j<M,\end{array}$$

$$y_i^0=u_0(x_i),\qquad 0\le i\le N,\qquad (6)$$

$$\overset{(s+1)}{y}_0=\mu_1(t_{j+1}),\quad \overset{(s+1)}{y}_N=\mu_2(t_{j+1}),\qquad 0\le j<M.$$

Ushbu sxema $\overset{(s+1)}{y}$ ga nisbatan chiziqli ko‘rinishda bo‘ladi.

Dastlab qaraganda, oshkormas sxema iteratsiya talab qilmaganligi sababli undan foydalanish, iteratsiya talab qiladigan oshkormas iterativ sxemadan foydalanganga qaraganda afzaldek tuyuladi. Ammo, amaliy hisoblashlar oshkormas iterativ sxema ning samarali ekanligini ko‘rsatadi.

Shu sababli, issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning chiziqli bo‘lmagan funksiyasi bo‘lgan holda, ya’ni $k(u)=k_0u,\ \sigma=1$ bo‘lgan holda oshkormas sxema va oshkormas iterativ sxemalarning samaradorligini hisoblash ekspramenti nuqtai - nazaridan taqqoslash muhim amaliy ahamiyatga ega.

Ma’lumki, ixtiyoriy sonli metodlarning samaradorligini baholashda asosiy ko‘rsatkich sifatida arifmetik amallar soni qaraladi. Ushbu maqolada oshkormas sxema va oshkormas iterativ sxemalarning samaradorligi issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti $k(u)=k_0u,\ \sigma=1$. ko‘rinishda bo‘lganda arifmetik amallar soni bo‘yicha taqqoslanadi, hamda oshkormas iterativ sxemaning o‘ta samarali metod ekanligi ko‘rsatiladi.

Ta’kidlash lozimki, ayirmali sxemalar (4) va (6) progonka metodi bilan yechiladi. Ma’lumki progonka metodini bitta qatlamda bajarish uchun 8N arifmetik amal sarflanadi, bu yerda N to‘rning tugunlari soni.

Oshkormas sxemani amalga oshirish uchun zarur bo‘lgan arifmetik amallar soni $Q_1=8N*N1$ ga, ushbu amallar soni ayirmali oshkormas iterativ sxema uchun $Q_2=8N*IT*N2$ ga teng bo‘ladi, bunda $8N$ progonka metodini amallar soni, $N1$ va $N2$ lar mos ravishda oshkormas sxema va oshkormas iterativ sxemalardagi vaqt bo‘yicha qatlamlar soni, IT esa sxema oshkormas iterativ sxemada bitta qatlamda amalga oshirilishi lozim bo‘lgan iteratsiyalar sonidan iborat.

TADQIQOT NATIJALARI

Hisoblash eksprimenti olib borish uchun masala parametrlarini quyidagicha tanlaymiz :

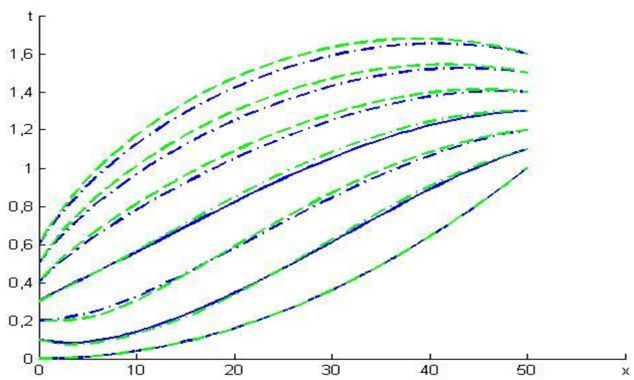
$$N=50\ ,\ M=6,\ T=0.6\ ,\ k(u)=k_0u^{\sigma},\ \ \sigma=1$$

$k(u)=k_0u$ - issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning chiziqli funksiyasi bo‘lgan holni qaraymiz. To‘rning qadamlari uchun $h=0.02$ va oshkormas sxema uchun $\tau=0.02$ hamda oshkormas iterativ sxema uchun $\tau=0.05$ qiymatlar tanlangan bo‘lsin. Oshkormas sxema (sxema a)) va oshkormas iterativ sxema (sxema b)) orqali hisoblash eksprimenti o‘tkazilgan va olingan natijalar 1-jadvalda keltirilgan. $\sigma=1$ bo‘lgan holda to‘r qadamlari yuqoridagidek tanlanganda oshkormas sxema uchun to‘r qatlamlari soni N1=30, oshkormas iterativ sxema uchun esa N2=12 tadan iborat bo‘ladi.

1-jadval

x_i \ t_j		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
i=0	a)	0	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000
	b)	0	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000
i=10	a)	0.0400	0.1296	0.3061	0.5654	0.8125	1.0118	1.1712
	b)	0.0400	0.1424	0.3270	0.5596	0.7802	0.9679	1.1253
i=20	a)	0.1600	0.3355	0.5880	0.8468	1.0884	1.2977	1.4714
	b)	0.1600	0.3433	0.5785	0.8208	1.0482	1.2488	1.4205
i=30	a)	0.3600	0.6237	0.8694	1.0847	1.2857	1.4706	1.6331
	b)	0.3600	0.6114	0.8442	1.0545	1.2503	1.4301	1.5909
i=40	a)	0.6400	0.9053	1.0849	1.2436	1.3955	1.5416	1.6777
	b)	0.6400	0.8866	1.0654	1.2239	1.3744	1.5181	1.6530
i=50	a)	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000	1.6000
	b)	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000	1.6000

Oshkormas sxema (sxema a)) va oshkormas iterativ sxema (sxema b)) bo‘yicha 1-jadvalda keltirilgan ayirmali yechimlar grafik ko‘rinishda 1-rasmda taqqoslangan.



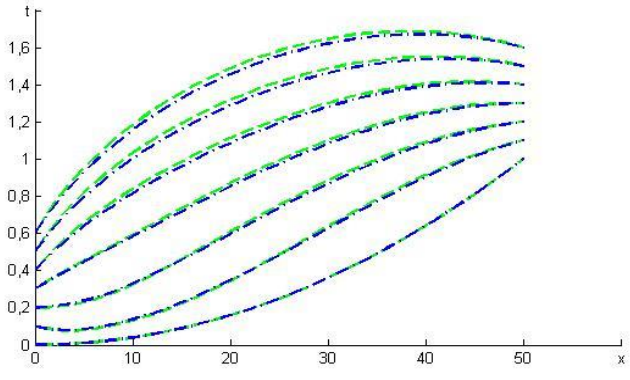
1-rasm. Sxemalar bo‘yicha olingan 1-jadvaldagi qiymatlarining grafik ko‘rinishida taqqoslanishi, bunda sxema a) uzlukli chiziq, sxema b) nuqtali uzlukli chiziq.

Hisoblash ekspremеnti o‘tkazish natijasida olingan 1-jadval va 1-rasmdan ko‘rinadiki, oshkormas sxema va oshkormas iterativ sxemalar bo‘yicha olingan natijalar biroz farqlanadi. Oshkormas sxemaning aniqligini oshirish uchun vaqt bo‘yicha to‘r qadamini kichraytiramiz, oshkormas iterativ sxemani o‘z holatida qoldiramiz, ya’ni oshkormas sxemada $(\tau = 0.002\,, N1 = 300\,)$ va oshkormas iterativ sxemada $(\tau = 0.02\,, N1 = 30\,)$ bo‘lganda to‘r tugunlarida hisoblash natijalari 2-jadvalda keltirilgan.

2-jadval

x_i \ t_j		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
i=0	a)	0	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000
	b)	0	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000
i=10	a)	0.0400	0.1326	0.3238	0.5943	0.8383	1.0309	1.1844
	b)	0.0400	0.1382	0.3303	0.5828	0.8136	1.0017	1.1552
i=20	a)	0.1600	0.3443	0.6076	0.8697	1.1121	1.3183	1.4872
	b)	0.1600	0.3466	0.5973	0.8510	1.0858	1.2879	1.4565
i=30	a)	0.3600	0.6369	0.8837	1.0994	1.3018	1.4866	1.6465
	b)	0.3600	0.6268	0.8676	1.0813	1.2807	1.4625	1.6218
i=40	a)	0.6400	0.9133	1.0918	1.2506	1.4036	1.5504	1.6855
	b)	0.6400	0.9020	1.0808	1.2396	1.3916	1.5368	1.6714
I=50	a)	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000	1.6000
	b)	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000	1.6000

Ayirmali sxemalar oshkormas sxema va oshkormas iterativ sxemalarlar bo‘yicha 2-jadvalda olingan natijalar grafik ko‘rinishda 2-rasmda berilgan.



2-rasm. Sxema a) uzlukli chiziq, sxema b) nuqtali uzlukli chiziq.

Hisoblash ekspremеnti natijalari ko‘rsatadiki, $\sigma = 1$ bo‘lgan holda oshkormas iterativ sxema bo‘yicha olingan natijalarga yaqin qiymatlarni olish uchun oshkormas sxemada vaqt bo‘yicha to‘r qadamini 10 marta kichraytirishga to‘g‘ri keladi. Bu holda oshkormas sxemada arifmetik amallar soni Q_1=120 000 ga, oshkormas iterativ sxemada esa Q_2=36 000 ga teng.

MUHOKAMA

O’tkazilgan hisoblash ekspremеnti natijasi parametr $\sigma = 1$ ning oshkormas sxema bo‘yicha ma’lum aniqlikka erishishi uchun vaqt bo‘yicha juda kichik τ qadam tanlash zarurligini, bu esa o‘z navbatida arifmetik amallar sonining keskin ortib ketishiga olib kelishini ko‘rsatadi. Oshkormas iterativ sxemalarni bo‘yicha ma’lum aniqlikni ta’minlash uchun vaqt bo‘yicha har bir qatlam oralig‘ida atigi uchta iteratsiya bajarish kifoya ekanligi namoyish etilgan, natijada arifmetik amallar soni sezilarli darajada kamayishiga erishish mumkinligi ko‘rsatilgan.

XULOSA

1. Kvazichiziqli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasida issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti temperaturaning chiziqli bo‘lmagan funksiyasi ko‘rinishida bo‘lgandagi sonli yechimlari oshkormas va oshkormas iterativ sxemalari bilan aniqlandi.
2. Oshkormas va oshkormas iteratsiya sxemalari arifmetik amallar soni bo‘yicha taqqoslandi, arifmetik amallar sonini hisoblash formulalari chiqarildi.
3. Qo‘yilgan differensial masalani yechishda oshkormas iteratsiya sxemasining o‘ta samarali ekanligi ko‘rsatildi.

REFERENCES

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики — М.: Наука, 1978. 591 с.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики — М.: Наука, 1976. 528 с.
3. *Самарский А. А.* Теория разностных схем — М.: Наука, 1977. 656 с.
4. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем — М.: Наука, 1971. 553 с.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем — М.: Наука, 1973. 415 с.
6. Самарский А. А., Николаев В. С. Методы решения сеточных уравнений — М.: Наука, 1978. 589 с.
7. *Нармурадов Ч. Б.* О сравнении итерационных схем для численного решения разностных аналогов повышенной точности задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Числен. методы механики сплошной среды., 2003. Т. 6. № 10. С. 97–104.
8. *Абуталиев Ф. Б., Нармурадов Ч. Б.* Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости — Т.: Фан ва технология, 2011. 188 с.
9. *Нармурадов Ч. Б.* Об одном эффективном методе решения уравнения Орра – Зоммерфельда // Математическое моделирование, 2005. Т. 9. № 17. С. 35–42.
10. *Нармурадов Ч. Б.* Математическое моделирование гидродинамических задач для двухфазных плоскопараллельных течений // Математическое моделирование, 2007. Т. 6.

Begaliyevich N. C., Mamarajabovich Y. S. Numerical Modeling of Heat Conduction Equation with Piecemeal Intermittent Continuous Coefficient //Central asian journal of mathematical theory and computer sciences. – 2021. – Т. 2. – №. 12. – С. 17