НЕГЛАДКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Отакулов Салим
доктор физико-математических наук, профессор
Джизакского Политехнического института
Жуманов Камол Сайфуллаевич
магистрант Джизакского Филиала Национального Университета Узбекистана
https://doi.org/10.5281/zenodo.6809643

Аннотация. *В работе рассмотрена задача оптимального управления минимаксного типа для линейной модели динамических систем. В данной задаче изучены некоторые свойства негладкого функционала. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности.*

Ключевые слова: *система управления, негладкий функционал, негладкая задача, минимаксная задача, условия оптимальности.*

THE NONSMOOTH OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR LINEAR DYNAMIC SYSTEM

Abstract. *In this paper we consider the optimal control problem minimax type for linear model of dynamic system. In this problem the some properties of nonsmooth functional is studied. The necessary and sufficient conditions of optimality are obtained.*

Keywords: *control system, nonsmooth functional, nonsmooth problem, minimax problem, conditions of optimality.*

ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени в фундаментальных и прикладных исследованиях по различным направлениям современной науки и техники можно увидеть тенденцию возрастания роли математических методов и компьютерного моделирования. Проблемы создания новых технологий и сложных технических аппаратур, вопросы проектирования автоматических систем управления обусловливают необходимость развития таких исследований, которые направлены на совершенствование оптимизационных моделей и развития математических методов оптимизации. Практическое применение методов оптимизации способствуют достижения цели эффективного использования природно-энергетических ресурсов и определения оптимальных параметров в различных инженерно-технических разработках и проектах. Математические методы оптимального управления имеют большое значение для разработки систем поддержки принятия решения с использованием новых информационно-коммуникационных технологий.

Задачи на *максимум и минимум* функционалов, возникают как *оптимизационные модели* различных прикладных задач из естествознания, экономики и техники. Для таких задач развита математическая теория оптимизации. В прикладных исследованиях наиболее широкие приложения имеют такие разделы теории оптимизации, как математическое программирование, математическая теория оптимального управления и теория принятия оптимальных решений [1–6].

Математическое моделирование разнообразных задач экономики и техники, таких, как принятия решения в экономическом планировании и организации производства, при проектировании технических устройств и управлении технологическими процессами приводят к специальным задачам оптимизации с *негладкими целевыми* функционалами. В результате исследований таких задач оптимизации развиты методы негладкой оптимизации, сформировались разделы негладкого и многозначного анализа [7– 10].

Большой класс негладких задач оптимального управления составляют задачи с целевыми функционалами в виде максимума или минимума. Каждая негладкая функция, возникающая в результате максимизации (или минимизации) определенного типа функционала по выбранному параметру имеют специфику, связанную с заданием самого вида функционала и ограничений. Поэтому эффективность методов решения негладкой задачи оптимизация существенно зависит от свойств целевых функций и ограничений на параметры системы [7,8,11-14].

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В данной работе рассматривается динамическая система управления, описываемая линейным векторным дифференциальным уравнением. Информация о начальном состоянии системы ограничивается лишь известным множеством возможных значений. В качестве критерия оценки качества управления рассматривается терминальный функционал типа функции максимума. Рассматриваемая задача исследуется методами динамических систем управления, выпуклого и многозначного анализа [5,7,8,9].

Постановка задачи. Пусть R^n – n-мерное евклидово пространство, $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ – скалярное произведение векторов $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$, $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ – норма вектора $x\in R^n$.

Рассмотрим линейную модель динамической системы управления

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)u+q(t), t\in T=[t_0,t_1], \qquad (1)$$

где $x\in R^n$ – вектор состояния системы, $u\in R^m$ – вектор управления, $A(t)$ – $n\times n$-матрица, $B(t)$ – $n\times m$-матрица, $q(t)\in R^n$ – детерминированный параметр внешних сил воздействия. Будем считать, что матрицы $A(t), B(t)$ и вектор-функция $q(t)$ непрерывны на T, а множество значений U вектора управления непустой выпуклый компакт из R^m.

Определение 1. Допустимым управлением назовем каждую измеримую m-вектор функций $u=u(t), t\in T$, такую что $u(t)\in U, t\in T$.

Обозначим через $U(T)$ множество всех допустимых управлений.

Определение 2. Допустимой траекторией, соответствующей управлению $u(\cdot)\in U(T)$ и начальной точке x^0, назовем абсолютно непрерывную n-вектор функцию $x(t)=x(t,x^0,u), t\in T$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду на T и начальному условию $x(t_0)=x^0$.

Согласно теории дифференциальных уравнений для каждого управления $u(\cdot)\in U(T)$ и начальной точке x^0 существует единственная допустимая траектория $x=x(t,x^0,u), t\in T$, системы (1).

Для оценки качества управления линейной системой (1) рассмотрим терминальный функционал(критерий) вида

$$g(x(t_1,x^0,u))=\sum_{i=1}^{p}\max_{\xi\in Z_i}(\xi,x(t_1,x^0,u)),\qquad(2)$$

где Z_i, $i=\overline{1,p}$, – компакты (замкнутые и ограниченные множества) из R^n. Критерий вида (2) является негладким функционалом, который определен с помощью негладкой функции типа максимума

$$g(x))=\sum_{i=1}^{p}\max_{\xi\in Z_i}(\xi,x).$$

Например, в частности, когда $p=n, Z_i=\{+e_i,-e_i\}, e_i=(0,...,\underset{i}{1},0,...,0), i=\overline{1,n}$, функционал (2) принимает вид следующего негладкого критерия качества управления

$$g(x(t_1,x^0,u))=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i(t_1,x^0,u)\right|,$$

где $x_i(t_1,x^0,u)-i$-компонента вектора $x(t_1,x^0,u)-$ правого конца допустимой траектории $x(t,x^0,u),\ t\in T$.

Предположим, что левый конец допустимых траекторий $x(t,x^0,u)$ подвижный, т.е. $x^0\in D, D-$заданный выпуклый компакт из R^n. Рассмотрим задачу минимизации негладкого функционала (2) на множестве $(x^0,u)\in D\times U(T)$. Тогда, данную задачу можно записать в следующем виде:

$$\max_{w\in W}(w,x(t_1,x^0,u))\to\min, x^0\in D,\ u\in U(T),\qquad(3)$$

где $w=\sum_{i=1}^{p}z_i$,$W=\sum_{i=1}^{p}Z_i$. Точку $x^{0^*}\in D$ и управление $u^*\in U(T)$, для которой

$$\max_{w\in W}(w,x(t_1,x^{0^*},u^*))=\min_{x^0\in D,\ u\in U(T)}\ \max_{w\in W}(w,x(t_1,x^{0^*},u^*)),$$

назовем *оптимальной начальной точкой* и *оптимальным управлением*.

Итак, рассматривается минимаксная задача оптимального управления. Для этой негладкой задачи будем изучать необходимые и достаточные условия оптимальности.

Вспомогательные результаты. Будем использовать формулу Коши для представления допустимых траекторий динамической системы (1).

Пусть $F(t,\tau)$ – фундаментальная матрица решений уравнения

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x,$$

т.е. $\dfrac{\partial F(t,\tau)}{\partial t}=A(t)F(t,\tau),\ F(\tau,\tau)=E,\ \tau\in T,$ где E – единичная $n\times n-$матрица.

Из результатов работы [1] известно, что фундаментальная матрица $F(t,\tau)$ непрерывна по совокупности переменных на $T\times T$ и обладает следующими свойствами:

а) $F(t,\tau)=F(t,s)F(s,\tau)$ для всех $t,s,\tau\in T$;

б) $F(t,\tau)$ при каждом $t\in T$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial\tau}=-F(t,\tau)A(\tau),\quad \tau\in T;$$

в) $F(t,\tau)=F^{-1}(\tau,t)\ \forall t,\tau\in T$.

Согласно результатам теории дифференциальных уравнений, при каждом $u(\cdot)\in U(T)$ абсолютно непрерывное решение $x(t)=x(t,x^0,u)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0)=x^0$, имеет представление

$$x(t,x^0,u)=F(t,t_0)x^0+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)q(\tau)d\tau\,, \qquad (4)$$

которого называют формулой Коши [1].

Определение 3. Множеством достижимости $X(t_1,x^0)$ системы (1) в момент времени $t_1>t_0$, назовем множество концов $x(t_1,x^0,u)$ всех траекторий системы (1), соответствующих всевозможным допустимым управлениям $u(\cdot)\in U(T)$:

$$X(t_1,x^0)=\{\xi\in R^n:\xi=x(t_1,x^0,u),u\in U(T)\}$$

Рассмотрим интеграл от многозначного отображения $G(t)=F(t_1,t)U$, т.е. интеграл:

$$\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)B(t)Udt=\left\{\xi\in R^n:\xi=\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)B(t)u(t)dt,u(\cdot)\in U(T)\right\}. \qquad (5)$$

Из теории многозначных отображений известно [10], что интеграл (5) является непустым выпуклым компактом из R^n.

Лемма 1. Множество достижимости $X(t_1,x^0)$ при любых $x^0\in R^n$ является выпуклым компактом и имеет представление

$$X(t_1,x^0)=F(t_1,t_0)x^0+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)B(t)Udt+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)q(t)dt. \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\xi}\in X(t_1,x^0)$. Тогда, согласно определению множества $X(t_1,x^0)$ существует допустимое управление $\tilde{u}(\cdot)\in U(T)$ такое, что $\tilde{\xi}=x(t_1,x^0,\tilde{u})$, т.е. в силу формулы Коши (4)

$$\tilde{\xi}=F(t_1,t_0)x^0+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)B(t)\tilde{u}(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)q(t)dt.$$

Откуда согласно определению интеграла (5),

$$\tilde{\xi}\in F(t_1,t_0)x^0+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)B(t)Udt+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)q(t)dt.$$

Итак,

$$X(t_1,x^0)\subset F(t_1,t_0)x^0+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)B(t)Udt+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)q(t)dt. \qquad (7)$$

Пусть теперь,

$$\bar{\eta}\in F(t_1,t_0)x^0+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)B(t)Udt+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)q(t)dt.$$

Это означает, что существует $\bar{u}(\cdot)\in U(T)$ такое, что

$$\overline{\eta}=F(t_1,t_0)x^0+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)B(t)\overline{u}(t)dt+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)q(t)dt.$$

Последнее, согласно формуле Коши (4) означает, что $\overline{\eta}=x(t_1,x^0,\overline{u})$. Итак,

$$F(t_1,t_0)x^0+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)B(t)Udt+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)q(t)dt\subset X(t_1,x^0). \qquad (8)$$

Полученные соотношения (7) и (8) доказывают справедливость равенства (6).

Теперь используем понятие *опорной функции* компактного множества.

Пусть Y – непустой компакт из R^n. Опорной функцией множества Y называется функция

$$\sigma(Y,\psi)=\max_{y\in Y}(y,\psi),\psi\in R^n. \qquad (9)$$

Из результатов выпуклого анализа [5,10] хорошо известно, что опорная функция $\sigma(Y,\psi)$ выпукла по аргументу $\psi\in R^n$ и

$$\sigma(\alpha_1Y_1+\alpha_2Y_2,\psi)=\alpha_1\sigma(Y_1,\psi)+\alpha_2\sigma(Y_2,\psi),\psi\in R^n, \qquad (10)$$

где $\alpha_1\geq 0,\alpha_2\geq 0$, Y_1,Y_2 – непустые компакты из R^n.

Из определений функционала (2) и опорной функции (9) , а также свойства (10) получим, что функционал (2) можно записать в следующем виде:

$$g(x(t_1,x^0,u))=\sum_{i=1}^{p}\sigma(Z_i,x(t_1,x^0,u))=\sigma(\sum_{i=1}^{p}Z_i,x(t_1,x^0,u)).$$

Теперь, используя равенство

$$\sum_{i=1}^{p}\max_{z_i\in Z_i}(z_i,x)=\max_{z_i\in Z_i,i=\overline{1,p}}(x,\sum_{i=1}^{p}z_i)=\max_{w\in W}(x,w)=\max_{w\in coW}(x,w),$$

и формулу Коши (4), получим следующий результат.

Лемма 2. Для функционала (2) имеет место равенство:

$$g(x(t_1,x^0,u))=\max_{w\in coW}[(F(t_1,t_0)x^0,w)+\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)B(t)u(t),w)dt+\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)q(t),w)dt]. \qquad (11)$$

Лемма 3. Функционал

$$J(u)=g(x(t_1,x^0,u)) \qquad (12)$$

является выпуклым на $U(T)$ и для любых $u_1(\cdot)\in U(T)$ и $u_2(\cdot)\in U(T)$ имеет место неравенство

$$|J(u_1)-J(u_2)|\leq M\int_{t_0}^{t_1}\|u_1(t)-u_2(t)\|dt,$$

где $M=\max_{t\in T}\|F(t_1,t)B(t)\|\sum_{i=1}^{p}\|Z_i\|$, $\|Z_i\|=\sup_{z_i\in Z_i}\|z_i\|, i=\overline{1,p}$.

Справедливость данного утверждения вытекает из формулы (11) и свойств интеграла Лебега.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Условия седловой точки. Для изучения условий оптимальности в задаче (2) рассмотрим функционал

$$\mu(x^0,u,w)=(F(t_1,t_0)x^0,w)+\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)B(t)u(t),w)dt+\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)q(t),w)dt. \quad (13)$$

Согласно лемме 2 с помощью функционала (13) терминальный критерий (2) записывается в виде

$$g(x(t_1,x^0,u))=\max_{w\in coW}\mu(x^0,u,w). \quad (14)$$

Введем обозначение $v=(x^0,u)$, $V=D\times U(T)$. Тогда функционал (13) записывается так: $\mu(v,w)=\mu(x^0,u,w)$.

Определение 4. Точка $(v^*,w^*)\in V\times coW$ называется седловой точкой функционала $\mu(v,w)$, если для всех $(v,w)\in V\times coW$ выполняется неравенство

$$\mu(v^*,w)\le\mu(v^*,w^*)\le\mu(v,w^*).$$

Из определения седловой точки функционала $\mu(v,w)$ и вспомогательных лемм 2 и 3 легко можно получить следующее утверждение.

Теорема 1. Точка $(v^*,w^*)\in V\times coW$ является седловой точкой функционала $\mu(v,w)$ тогда и только тогда, когда выполняются седующие равенства:

$$\max_{w\in coW}\mu(v^*,w)=\min_{v\in V}\max_{w\in coW}\mu(v,w);$$

$$\min_{v\in V}\mu(v,w^*)=\max_{w\in coW}\min_{v\in V}\mu(v,w);$$

$$\min_{v\in V}\max_{w\in coW}\mu(v,w)=\max_{w\in coW}\min_{v\in V}\mu(v,w).$$

Данная теорема дает необходимые и достаточные условия для седловой точки функционала $\mu(v,w)$.

Условия оптимальности. Теперь, используя этот результат, вид функционала (13) и формулу (14), можно получить следующую теорему о необходимом и достаточном условии оптимальности в задаче (3).

Теорема 2. Для оптимальности управления $u^*\in U(T)$ и начальной точки $x^{0^*}\in D$ в задаче (3) необходимо и достаточно существование такой точки $w^*\in coW$ и выполнения следующих условий:

$$\mu(x^{0^*},u^*,w^*)=\max_{w\in coW}\mu(x^{0^*},u^*,w^*), \quad (15)$$

$$\min_{x^0\in D}(F(t_1,t_0)x^0,w^*)=(F(t_1,t_0)x^{0^*},w^*), \quad (16)$$

$$\min_{u\in U}(F(t_1,t)B(t)u,w^*)=(F(t_1,t)B(t)u^*(t),w^*),\ t\in T. \quad (17)$$

Рассмотрим функцию

$$\gamma(w)=\min_{\xi\in D}(F(t_1,t_0)\xi,w)+\int_{t_0}^{t_1}\min_{u\in U}(F(t_1,t)B(t)u,w)dt+\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)q(t),w)dt. \quad (18)$$

В дополнении к данному результату имеет место следующая теорема о необходимом условии оптимальности.

Теорема 3. Пусть $u^* \in U(T)$ – оптимальное управление, $x^{0^*} \in D$ – оптимальная начальная точка в задаче (3). Тогда для любого $w^* \in coW$, удовлетворяющего условию

$$\gamma(w^*) = \max_{w \in coW} \gamma(w), \tag{19}$$

имеют места соотношения (16) и (17).

ОБСУЖДЕНИЕ

Из условий оптимальности (16), (17) ясно, что они могут быть применены, если $w^* \neq 0$. Поэтому представляют интерес такие условия, при выполнении которых существует точка $w^* \in coW$, $w^* \neq 0$, являющаяся точкой глобального максимума функции $\gamma(w)$ на выпуклом компакте coW.

Ясно, что если $0 \notin coW$, то каждая точка $w^* \in coW$, определяемая из (19), удовлетворяет условию $w^* \neq 0$. Поэтому, в случае, когда $0 \in coW$, возникает вопрос о существовании точки $w^* \in coW$, $w^* \neq 0$, удовлетворяющую условию (19). Воспользовавшись определением функции (18) и результатов выпуклого анализа, можно показать, что для функции $\gamma(w)$ каждая точка глобального максимума $w^* \in coW$ удовлетворяет условию $w^* \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\max_{w \in coW} \gamma(w) > 0.$

Из этих результатов следует, что для получения решения задачи (3) необходимо сначала решить вспомогательную конечномерную задачу максимизации

$$\gamma(w) \to \max, \ w \in coW. \tag{20}$$

В задаче (20) целевая функция является вогнутой функцией, а ограничение есть выпуклый компакт. Ее можно эквивалентно заменить следующей задачей выпуклого программирования

$$-\gamma(w) \to \min, \ w \in coW.$$

ВЫВОДЫ

Итак, на основе необходимых и достаточных условий оптимальности для минимаксной задачи оптимального управления (3) можно предлагать следующий алгоритм решения:

1. Найти фундаментальную матрицу решений уравнения $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$.
2. Определить множество $W = \sum_{i=1}^{p} Z_i$ и его выпуклую оболочку coW.
3. Определить функцию $\gamma(w)$ по формуле (18), где U – строго выпуклый компакт из R^m.
4. Решить вспомогательную задачу (20) и найти ее решение $w^* \neq 0$.
5. Найти функцию $u^*(t), t \in T$, удовлетворяющую при всех $t \in T$ условию (17).
6. Найти оптимальную начальную точку $x^{0^*} \in D$ из условия (16)

Построенная по этому алгоритму функция $u^*(t), t \in T$, и точка $x^{0^*} \in D$ составляют решения минимаксной задачи (3).

REFERENCES

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. –М.: Наука, 1979.
2. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
3. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. - СПб: Питер, 2000.
4. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. –М.: Мир, 1988.
5. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980.
6. Черноморов Г.А. Теория принятия решений. – Новочеркасск: 2002.
7. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
8. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М.: Наука, 1990.
9. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988.
10. Половинкин Е.С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. –М.: Физматлит, 2015.
11. Otakulov S. The control problems of ensemble of trajectories of differensial inclusions. LAP Lambert Academic Publishing, 2019.
12. Otakulov S., Kh K. F. About the conditions of optimality in the minimax problem for controlling differential inclusion with delay //Academicia: An International Multidisciplinary Research Jounal. – 2020. – Т. 10. – №. 4. – С. 685-694.
13. Otakulov S., Haydarov T. T. The nonsmooth control problem for dinamic system with parameter under conditions of incomplete initial date //International Conference On Innovation Perspectives, Psychology and Social Studies (ICIPPCS-2020). – 2020. – С. 211-214.
14. Отакулов С., Хайдаров Т. Т. Негладкая задача оптимального управления для динамической системы с параметром //CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES. – 2021. – Т. 2. – №. 10. – С. 132-138.
15. Отакулов С., Хайдаров Т. Т. НЕГЛАДКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОТЫ ИНФОРМАЦИИ //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. 1. – С. 349-359.
16. Отакулов С., Равшанов И. А. Ў. Свойства одного класса функций типа максимума и минимума и их применение к негладким задачам оптимизации //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. A2. – С. 60-68.
17. Отакулов С., Абдухамидов Н. Т. Ў. О НЕПРЕРЫВНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КЛАССА КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. A3. – С. 103-113.