О НЕПРЕРЫВНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КЛАССА КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Отакулов Салим
Доктор физико-математических наук, профессор, Джизакский политехнический институт
Абдухамидов Нодир Тохир ўғли
Магистрант, Джизакский Филиал Национального Университета Узбекистана
https://doi.org/10.5281/zenodo.6711214

Аннотация. *В данной работе рассматривается непрерывная минимаксная задача для класса квадратичных функций. В этой негладкой задаче изучены некоторые свойства функции максимума. Получены условия существования и единственности решения. Исследованы необходимые и достаточные условия оптимальности.*

Ключевые слова: *квадратичная функция, функция максимума, негладкая функция, минимаксная задача, существование решения, условия оптимальности.*

ON THE CONTINUOUS MINIMAX PROBLEM FOR CLASS QUADRATIC FUNCTIONS

Abstract. *In the paper we consider continuous minimax problem for class quadratic functions. In the nonsmooth optimization problem some properties of maximum function are studied. The conditions for existence and uniquely of solution are obtained. The necessary and sufficient conditions of optimality are researched.*

Keywords: *quadratic function, maximum function, nonsmooth function, minimax problem, conditions for existence, conditions of optimality.*

ВВЕДЕНИЕ

Задачи на отыскание максимума и минимума, т.е. наибольших и наименьших значений переменных величин, возникают всюду, где следует определить наилучшего, совершенного, или, как говорят, оптимального решения по некоторому критерию из множества возможных вариантов. Их называют экстремальными задачами или задачами оптимизации. В становлении и развитии теории оптимизации основополагающими были задачи, идеи и методы таких великих ученых, как И.Кеплер, П.Ферма, Х. Гюйгенс, И.Ньютон, И.Бернулли, Ж.Лагранж, Л. Эйлер, К.Вейерштрасс и др. Теория экстремальных задач занимает важное место в современной математике и имеет разнообразные области приложения. Широкие приложения имеют такие разделы теории оптимизации, как математическое программирование, теория оптимального управления и математическая теория принятия оптимальных решений.

В настоящее время математические методы оптимизации большой практический интерес представляют для многих научно-теоретических и прикладных исследований из различных областей. Методами оптимизации воспользуются математики, механики, физики, инженеры-конструкторы, разработчики систем автоматического управления, специалисты по исследованиям операций и информационно-коммуникационных технологий, экономисты и многие другие специалисты-прикладники. Методы оптимизации развивается в результате научных исследований, направленных на разрешение актуальных проблем современной экономики, техники, производства и управления.

Важные оптимизационные модели возникают при экономическом планировании и инженерного проектирования, в системном анализе, в процессах управления из различных сфер техники и производства. Среды этих моделей отдельный класс составляют задачи оптимизации с негладкими целевыми функционалами. Одним из подходов, приводимых к негладким задачам оптимизации, является принципа минимакса (максимина) в задачах принятия решения. Данный принцип основан на оптимизации критерия качества с учетом самых неблагоприятных реализаций неизвестных параметров. Применение минимакса и максимина составляет одну их основных подходов при разрешении игровых задач в условиях риска и в конфликтных ситуациях. Возросшее значение проблем принятия решения в условиях неполноты информации и неточности данных привели к возникновению и развитию математических методов негладкой оптимизации и многозначного анализа.

Функции типа максимума и минимума составляют широкий класс негладких функций. Свойства функций таких типов зависит от заданных функций и ограничений, на базе которых они определяются. Негладкие функции типа максимума и минимума и их линейные комбинации относятся классам субдифференцируемых и квазидифференцируемых функций. Метод решения каждой негладкой задачи оптимизации существенно зависит от структурных свойств заданной целевой функции и ограничений. Следует отметить, что оптимизация негладких функционалов составляет важный и широкий класс в задачах управления ансамблем траекторий динамических систем.

Математическое программирование, являющееся важным разделом теории экстремальных задач, возникла в 30-40 годы прошлого века. Оно интенсивно развивается в направлениях методов линейного, выпуклого, нелинейного, целочисленного и динамического программирования. Методы математического программирования имеют приложения во всех областях исследований, связанных с вопросами оптимизации. Они играют важную роль в исследованиях задач многокритериальной оптимизации, экстремальных задач с интервальными неопределенностями. В математическом программировании задачи оптимизации функций типа максимума или минимума отличаются негладкостью целевых функций и сложностью разработки алгоритмов решения.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Пусть R^n – евклидово пространство n-векторов $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ со скалярным произведением $(xy)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ и нормой $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$. В дальнейшем при использовании векторно-матричной записи будем считать, что элементы R^n – суть векторы-столбцы.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x,u)=\frac{1}{2}(Ax,x)+(Bu,u)+(Cx,u), \tag{1}$$

где $A-$ симметрическая матрица размера $n\times n$, $B-$ матрица размера $m\times m$, $C-$ матрица размера $m\times n$. Пусть $U-$ компактное, т.е. ограниченное и замкнутое подмножество R^m. Для функции (1) определим функцию максимума [12]

$$\varphi(x)=\max_{u\in U} f(x,u)=\max_{u\in U}[\frac{1}{2}(Ax,x)+(Bu,u)+(Cx,u)]. \qquad (2)$$

Задачу минимизации функции максимума вида (2) на замкнутом множестве $\Omega\subseteq R^n$, т.е. задачу нахождения точки $x^*\in\Omega$, удовлетворяющую условию

$$\varphi(x^*)=\inf_{x\in\Omega}\varphi(x)\equiv\inf_{x\in\Omega}\max_{u\in U}[\frac{1}{2}(Ax,x)+(Bu,u)+(Cx,u)],$$

назовем минимаксной задачей оптимизации квадратичной функции (1). Поставленную задачу оптимизации обозначим так:

$$\max_{u\in U}[\frac{1}{2}(Ax,x)+(Bu,u)+(Cx,u)]\to\min, x\in\Omega. \qquad (3)$$

Минимаксная задача вида (3) относится классу непрерывных минимаксных задач [12]. Основной целью данной работы является выяснение условий оптимальности в поставленной минимаксной задаче. Результаты, полученные по условиям оптимальности, составляют теоретическую базу для разработки численных методов решения задачи (3). Методы исследования минимаксной задачи (3) основываются к общей теории задач оптимизации минимаксного типа и теории негладкого анализа.

Для изучения поставленной минимаксной задачи (3) нам необходимо некоторые свойства функции максимума (2).

Свойство 1. Функция максимума $\varphi(x)=\max_{u\in U}[\frac{1}{2}(Ax,x)+(Bu,u)+(Cx,u)]$непрерывна на R^n. Если здесь при любом $x\in R^n$ максимум достигается в единственной точке $u(x)\in U$, то функция $u=u(x)$ также непрерывна на R^n.

В самом деле, квадратичная функция

$$f(x,u)=\frac{1}{2}(Ax,x)+(Bu,u)+(Cx,u)$$

непрерывна по совокупности переменных (x,u) на $R^n\times R^m-$ декартовом произведении пространств R^n и R^m. Поэтому, так как $U-$ компакт, то в силу известной теоремы Вейерштрасса из математического анализа, для каждой точки $x\in R^n$ существует точка $u(x)\in U$, такая, что

$$\varphi(x)=\max_{u\in U} f(x,u)=f(x,u(x)).$$

Возьмем произвольную точку $\bar{x}\in R^n$ и произвольную последовательность точек $x^k\in R^n$, сходящуюся к $\bar{x}$. Имеем:

$$\varphi(\bar{x})=f(\bar{x},u(\bar{x}))\geq f(\bar{x},u(x^k)),\ \varphi(x^k)=f(x^k,u(x^k))\geq f(x^k,u(\bar{x})).$$

Следовательно,

$$f(x^k,u(\bar{x}))-f(\bar{x},u(\bar{x}))\leq\varphi(x^k)-\varphi(\bar{x})\leq f(x^k,u(x^k))-f(\bar{x},u(x^k)).$$

В силу компактности U из последовательности точек $u(x^k)\in U$ можно извлечь сходящуюся к $\bar{u}\in U$ подпоследовательность, для которой сохраним прежнее обозначение

$\{u(x^k)\}$, т.е. $u(x^k) \to \bar{u}$ при $k \to \infty$. Теперь, переходя к пределу при $k \to \infty$, и учитывая непрерывность функции (1), из последней цепочки неравенств получим, что $\varphi(x^k) \to \varphi(\bar{x})$, $k \to \infty$. Итак, функция максимума (2) непрерывна в каждой точке $\bar{x} \in R^n$.

Теперь предположим, что максимум в (2) достигает в единственной точке $u(x) \in U$ при всех $x \in R^n$, но функция $u = u(x)$ не является непрерывной в некоторой точке $\bar{x} \in R^n$. Тогда, для некоторой последовательности точек $x^k \to \bar{x} \in R^n$ предел последовательности $u(x^k)$ не равна $u(\bar{x})$, т.е. $u(x^k) \to \bar{u} \neq u(\bar{x}), k \to \infty$. В силу непрерывности функции максимума $\varphi(x^k) \to \varphi(\bar{x}) = f(\bar{x}, u(\bar{x})), k \to \infty$. С другой страны, в силу непрерывности функции квадратичной функции $f(x,u)$, имеем $\varphi(x^k) = f(x^k, u(x^k)) \to f(\bar{x}, \bar{u})$. Таким образом, $\varphi(\bar{x}) = f(\bar{x}, u(\bar{x})) = f(\bar{x}, \bar{u})$, $\bar{u} \neq u(\bar{x})$. А это противоречит тому, что максимум в (2) достигается в единственной точке. Полученное противоречие показывает неверность нашего предположения и доказывает непрерывность функции $u = u(x)$, значение которой при всех $x \in R^n$ определяется как единственная точка максимума в (2).

Свойство 2. Пусть матрица A знакоположительно ($A \geq 0$), т.е. $(Ax, x) \geq 0 \, \forall x \in R^n$. Тогда функция максимума (2) является выпуклой на R^n. В случае, когда матрица A положительно определена ($A > 0$), т.е. $(Ax, x) > 0 \, \forall x \neq 0$, функция максимума будет строго выпуклой на R^n.

В самом деле, если матрица A знакоположительно, то согласно результатам выпуклого анализа [2,3], квадратичная функция (1) является выпуклой по переменной $x \in R^n$ при каждом фиксированном $u \in R^m$, т.е. для любого $x \in R^n, y \in R^n$ и произвольного числа $\alpha \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y, u) \leq \alpha f(x,u) + (1-\alpha) f(y,u).$$

Тогда имеем:

$$\max_{u \in U} f(\alpha x + (1-\alpha) y, u) \leq \alpha \max_{u \in U} f(x,u) + (1-\alpha) \max_{u \in U} f(y,u).$$

А это означает, что функция максимума (2) выпукла на R^n. Из этих рассуждений легко следует, что если матрица положительно определена, то функция максимума будет также строго выпуклой.

Приведенные свойства функции максимума показывают, что для выпуклой квадратичной функции вида (1) операция максимума сохраняет не только ее непрерывность, но и выпуклость. Однако, при переходе к функции максимума (2) теряется гладкость квадратичной функции (1), т.е. дифференцируемость не имеет место в некоторых точках ее области определения.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем результаты исследования минимаксной задачи (3).

Теорема 1. Пусть матрица A положительно определена ($A > 0$). Тогда решение минимаксной задачи (3) существует и единственно.

Доказательство. В самом деле, если матрица A положительно определена, то

$$f(x,u) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (Bu, u) + (Cx, u) \geq m\frac{1}{2}\|x\|^2 - \|x\| \min_{u \in U}\|C'u\| + \min_{u \in U}(Bu, u),$$

где $m = \min_{\|x\|=1}(Ax, x) > 0$. Из этого неравенства следует, что $\varphi(x) = \max_{u\in U} f(x,u) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$. Тогда, из этого свойства функции максимума легко получить, что множество уровня $L(x^0) = \{x \in \Omega : \varphi(x) \le \varphi(x^0)\}$ непусто и ограничено при любом $x^0 \in \Omega$. А в силу непрерывности функции максимума и замкнутости множества $\Omega \subseteq R^n$ получим, что множество уровня $L(x^0)$ замкнуто. Итак, в силу теоремы Вейерштрасса о достижении нижней грани непрерывной функции на компакте, существует точка $x^* \in L(x^0)$, такая, что $\varphi(x^*) = \inf_{x\in L(x^0)} \varphi(x)$. Ясно, что $\varphi(x^*) = \inf_{x\in L(x^0)} \varphi(x) = \inf_{x\in\Omega} \varphi(x)$, т.е. функция максимума достигает нижнюю границу на множестве Ω. А единственность точки минимума следует из свойства строгой выпуклости функции максимума (2) при условии положительной определенности матрицы A.

Таким образом, доказано, что если матрица A положительно определена, то решение минимаксной задачи (3) существует и единственно.

Наш следующий шаг в изучении минимаксной задачи (3) является выяснение дифференцируемости по направлению функции максимума (2). Если учесть свойство выпуклости функции максимума (2), то согласно результатам выпуклого анализа [2,13] дифференцируемость по направлениям такой функции гарантирована. Но для нас важнее вид производной по направлению, точнее говоря, формула ее вычисления.

Для фиксированной точки $x \in R^n$ рассмотрим множество:

$$Z(x) = \{u \in U : f(x,u) = \max_{v\in U} f(x,v)\},$$

где $f(x,u)$ – есть квадратичная функция вида (1), т.е.

$$f(x,u) = \frac{1}{2}(Ax, x) + (Bu, u) + (Cx, u).$$

Приведем две вспомогательные результаты, которые следуют из результатов работ [12,13].

Лемма 1. Для всех $x \in R^n$, $g \in R^n$, $\|g\| = 1$ справедливо соотношение

$$\lim_{\alpha\to+0} \max_{u\in Z(x+\alpha g)} \min_{v\in Z(x)} \|u - v\| = 0.$$

Лемма 2. Для всех $x \in R^n$ равномерно по $g \in R^n$, $\|g\| = 1$ справедливо соотношение

$$\lim_{\alpha\to+0} \{ \max_{u\in P(x,\alpha)} (Ax + C'u, g) - \max_{u\in Z(x)} (Ax + C'u)\} = 0,$$

где $P(x,\alpha,g) = Z(x+\alpha g) \bigcup Z(x)$.

Производной по направлению $g \in R^n$, $\|g\| = 1$ функции $\varphi(x)$ в точке $x^0 \in R^n$ называется конечный предел

$$\frac{\partial \varphi(x^0)}{\partial g} = \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\varphi(x^0 + \alpha g) + \varphi(x^0)}{\alpha}.$$

Теорема 2. Функция максимума $\varphi(x)$ вида (2) имеет в каждой точке $x \in R^n$ производную по любому направлению $g \in R^n$, $\|g\| = 1$, причем справедлива формула:

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial g}=\max_{u\in Z(x)}(Ax+C'u,g). \qquad (4)$$

Доказательство. Для квадратичной функции (1) имеем:

$$f(x+\alpha g,u)=\frac{1}{2}(Ax+\alpha Ag,x+\alpha g)+(Bu,u)+(Cx+\alpha Cg,u)=f(x,u)+$$

$$+\alpha(Ax,g)+\alpha(C'u,g)+\alpha^2\frac{1}{2}(Ag,g).$$

Отсюда и из определения множеств $Z(x)$ и $P(x,\alpha,g)=Z(x+\alpha g)\bigcup Z(x)$ следует, что

$$\max_{u\in U}f(x+\alpha g,u)=\max_{u\in Z(x+\alpha g)}f(x+\alpha g,u)\le\max_{u\in P(x,\alpha,g)}f(x+\alpha g,u)\le\max_{u\in P(x,\alpha,g)}f(x,u)+$$

$$+\alpha\max_{u\in P(x,\alpha,g)}(Ax+C'u,g)+\alpha^2\frac{1}{2}(Ag,g). \qquad (5)$$

Положим $\beta(\alpha)=\alpha^2\frac{1}{2}\max_{\|g\|=1}\|Ag\|$. Так как $\max_{u\in P(x,\alpha,g)}f(x,u)=\max_{u\in U}f(x,u)$, то из (5) следует неравенство

$$\max_{u\in U}f(x+\alpha g,u)-\max_{u\in U}f(x,u)\le\alpha\max_{u\in P(x,\alpha,g)}(Ax+C'u,g)+u,g)+\beta(\alpha).$$

Теперь, учитывая лемму 2, из последнего неравенства получим

$$\varphi(x+\alpha g)-\varphi(x)\le\alpha\max_{u\in Z(x)}(Ax+C'u,g)+o(\alpha), \qquad (6)$$

где $o(\alpha)\to 0$ и $o(\alpha)/\alpha\to 0$ при $\alpha\to 0+$.

С другой стороны

$$\max_{u\in U}f(x+\alpha g,u)\ge\max_{u\in U}[f(x,u)+\alpha(Ax+C'u,g)]-\alpha^2\frac{1}{2}\max_{\|g\|=1}\|Ag\|\ge$$

$$\ge\max_{u\in Z(x)}[f(x,u)+\alpha(Ax+C'u,g)]-\alpha^2\frac{1}{2}\max_{\|g\|=1}\|Ag\|=\max_{u\in U}f(x,u)+\alpha\max_{u\in Z(x)}(Ax+C'u,g)-\beta(\alpha)$$

.

Отсюда следует неравенство

$$\varphi(x+\alpha g)-\varphi(x)\ge\alpha\max_{u\in Z(x)}(Ax+C'u,g)-o(\alpha). \qquad (7)$$

Объединяя (6) и (7), получим

$$\alpha\max_{u\in Z(x)}(Ax+C'u,g)-o(\alpha)\le\varphi(x+\alpha g)-\varphi(x)\le\alpha\max_{u\in Z(x)}(Ax+C'u,g)+o(\alpha). \qquad (8)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial g}=\lim_{\alpha\to 0+}\frac{\varphi(x+\alpha g)+\varphi(x)}{\alpha}=\max_{u\in Z(x)}(Ax+C'u,g),$$

т.е. производные по направлениям $g\in R^n$, $\|g\|=1$, существует и справедлива формула (4). Теорема доказана.

Из доказанной формулы (4) и неравенства (8) следует формула для функции максимума (2):

$$\varphi(x+\alpha g)=\varphi(x)+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial g}+o(\alpha).$$

Пример 1. Пусть квадратичная функция (1) дана со следующими данными:

$$n=2,\ m=1,\ x=(x_1,x_2),\ A=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix},\ B=1,\ C=(3,0),$$

т.е. $f(x,u)=x_2^2+3x_1u+u^2$, $u\in U=[-1,1]$. Рассмотрим функцию максимума

$$\varphi(x)=\max_{u\in U}f(x,u)=\max_{u\in[-1,1]}(x_2^2+3x_1u+u^2)=x_2^2+3|x_1|+1.$$

Для этой функции множество $Z(x)=\{u\in U:\ f(x,u)=\max_{v\in U}f(x,v)\}$имеет вид:

$$Z(x)=\begin{cases}1, если\ \ x_1>0\\ -1, если\ \ x_1<0\\ \{-1,1\}, если\ \ x_1=0\end{cases}=\begin{cases}sign(x_1), если\ \ x_1\neq 0\\ \{-1,1\},\ если\ \ x_1=0.\end{cases}$$

В силу (4) для функции максимума в данном примере производная по направлению $g=(g_1,g_2)$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial g}=\max_{u\in Z(x)}(Ax+C'u,g)=\max_{u\in Z(x)}\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}u,\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}\right)=\max_{u\in Z(x)}(3ug_1+2x_2g_2)=$$

$$=\begin{cases}3g_1sign(x_1)+2x_2g_2,\ если\ \ x_1\neq 0\\ 3|g_1|+2x_2g_2,\ если\ \ x_1=0.\end{cases}$$

Например, для точек $x^0=(1,1)$ и $x^*=(0,1)$ имеем:

$$\frac{\partial\varphi(x^0)}{\partial g}=3g_1sign(x_1^0)+2x_2^0g_2=3g_1+2g_2,\ \frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial g}=3|g_1|+2g_2.$$

Теперь изучим необходимые и достаточные условия оптимальности в минимаксной задаче (3).

Определим множество

$$\Gamma(x^*)=\{v\in R^n:v=\lambda(q-x^*),\lambda>0,q\in\Omega\},$$

где x^*– фиксированная точка из Ω. Множество $\Gamma(x^*)$ является выпуклым конусом, т.е. для всех $v\in\Gamma(x^*)$, $w\in\Gamma(x^*)$ и всех $\lambda>0$ имеет место включения $\lambda v\in\Gamma(x^*)$ и $v+w\in\Gamma(x^*)$. Замыкание $\overline{\Gamma}(x^*)$ множества $\Gamma(x^*)$ называется конусом возможных направлений множества в точке $x^*\in\Omega$. Например, пусть $\Omega=\{x=(x_1,x_2):|x_1|\le 1\}$, $x^*=(1,2)\in\Omega$. Тогда $\Gamma(x^*)=\overline{\Gamma}(x^*)=\{v=(v_1,v_2):v_1\le 0\}$. Если $x^*\in\operatorname{int}\Omega$, то $\Gamma(x^*)=\overline{\Gamma}(x^*)=R^n$.

Теорема 3. Для того чтобы, точка $x^*\in\Omega$ была решением минимаксной задачи (3) необходимо, а в случае знакоположительности матрицы A также и достаточно, выполнение неравенства

$$\inf_{g\in\overline{\Gamma}(x^*),\|g\|=1}\ \max_{u\in Z(x^*)}(Ax^*+C'u,g)\ge 0. \qquad (9)$$

Доказательство. В силу результатов негладкой оптимизации [13], для того чтобы точка $x^* \in \Omega$ была точкой минимума функции $\varphi(x)$ необходимо, а в случае выпуклости $\varphi(x)$ также и достаточно выполнение неравенства

$$\inf_{g\in\overline{\Gamma}(x^*)\|g\|=1} \frac{\partial\varphi(x^*)}{\partial g} \geq 0. \qquad (10)$$

В силу теоремы 2 соотношение (10) принимает вид (9). Теорема доказана.

Пример 2. Рассмотрим квадратичную функцию (1), в которой

$n = m = 2,\ ,x = (x_1, x_2)$, $u = (u_1, u_2)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

т.е. $f(x,u) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + u_1^2 - u_2^2 + x_2 u_1 + x_1 u_2$, $u \in U = \{v = (v_1, v_2) : v_1 = v_2, |v_1| \leq 1\}$.

Для этой функции рассмотрим задачу минимизации функции максимума на множестве $\Omega = \{x : 1 \leq x_2 \leq x_1\}$, т.е. минимаксную задачу:

$$\max_{u\in U} \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)^2 + u_1^2 - u_2^2 + x_2 u_1 + x_1 u_2] \to \min, x \in \Omega. \qquad (11)$$

Найдем аналитический вид функции максимума в нашем примере. Имеем:

$$\varphi(x) = \max_{u\in U} f(x,u) = \max_{u\in U}[\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + u_1^2 - u_2^2 + x_2 u_1 + x_1 u_2] =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \max_{u\in U}[u_1^2 - u_2^2 + x_2 u_1 + x_1 u_2] = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \max_{|u_1|\leq 1}(x_1 + x_2)u_1 =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + |x_1 + x_2|.$$

Множество $Z(x) = \{u \in U : f(x,u) = \max_{v\in U} f(x,v)\}$ имеет следующий вид:

$$Z(x) = \begin{cases} u_1 = u_2 = 1, \textit{если } x_1 + x_2 > 0 \\ u_1 = u_2 = -1, \textit{ если } x_1 + x_2 < 0 \\ U, \textit{ если } x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Сначала проверим условие оптимальности для точки $x^0 = (2,1) \in \Omega$. Для этой точки $Z(x^{0^{\cdot}}) = \{u_1 = 1. u_2 = 1\}$ и конус возможных направлений $\overline{\Gamma}(x^0) = \{v = (v_1, v_2) \in R^2 : v_2 \geq 0\}$. Проверим выполнение условия (9):

$$\inf_{g\in\overline{\Gamma}(x^*),\|g\|=1} \max_{u\in Z(x^*)} (Ax^0 + C'u, g) = \inf_{g_2\geq 0,\|g\|=1} \max_{u\in Z(x^0)} \left\{(x_1^0 - x_2^0 + u_2)g_1 + (x_2^0 - x_1^0 + u_1)g_2)\right\} =$$

$$= \inf_{g_2\geq 0,\|g\|=1} g_1 = -1 < 0.$$

Поскольку необходимое условие оптимальности не выполняется, то точка $x^0 = (2,1) \in \Omega$ не является решением задачи (11).

Теперь рассмотрим точку $x^* = (1,1) \in \Omega$. Для этой точки $Z(x^{*^{\cdot}}) = \{u_1 = 1. u_2 = 1\}$, $\overline{\Gamma}(x^*) = \{v = (v_1, v_2) \in R^2 : 0 \leq v_2 \leq v_1\}$. Проверим выполнение условия (9). Имеем:

$$\inf_{g\in\overline{\Gamma}(x^*),\|g\|=1} \max_{u\in Z(x^*)} (Ax^* + C'u, g) = \inf_{0\leq g_2\leq g_1,\|g\|=1} \max_{u\in Z(x^*)} \left\{(x_1^* - x_2^* + u_2)g_1 + (x_2^* - x_1^* + u_1)g_2)\right\} =$$

$$= \inf_{0 \le g_2 \le g_1, \|g\|=1} (g_1 + g_2) \ge \inf_{g_2 \ge 0} 2g_2 \ge 0 .$$

Условие (9) выполняется. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ знакоположительно, т.е.

$(Ax, x) = (x_1 - x_2)^2 \ge 0$. Итак, согласно теореме 3 точка $x^* = (1,1) \in \Omega$ является решением минимаксной задачи (11).

Замечание 1. Так как множество $\{g : g \in \overline{\Gamma}(x^*), \|g\| = 1\}$замкнуто и ограничено, то точная нижняя граница(*inf*) в левой части (9) достигается, и поэтому необходимое и достаточное условие оптимальности в минимаксной задаче (3) можно записать в виде:

$$\min_{g \in \overline{\Gamma}(x^*), \|g\|=1} \max_{u \in Z(x^*)} (Ax^* + C'u, g) \ge 0 . \qquad (12)$$

Следствие 1. Если $\Omega = R^n$, то конус возможных направлений в каждой точке $x^* \in \Omega$ совпадает с пространством R^n, т.е. $\overline{\Gamma}(x^*) = R^n$. Поэтому, в данном случае условие оптимальности (12) примет вид:

$$\min_{\|g\|=1} \max_{u \in Z(x^*)} (Ax^* + C'u, g) \ge 0. \qquad (13)$$

Следствие 2. Пусть $x^* \in \Omega = R^n$ и существует точка $u^* \in Z(x^*)$, такая, что $2Ax^* + C'u^* = 0$. Тогда, если матрица A– знакоположительно, то x^*– является решением минимаксной задачи (3).

В самом деле, имеем:

$$\min_{\|g\|=1} \max_{u \in Z(x^*)} (Ax^* + C'u, g) \ge \max_{u \in Z(x^*)} \min_{\|g\|=1} (Ax^* + C'u, g) = - \min_{u \in Z(x^*)} \|Ax^* + C'u\| . \quad (14)$$

Следовательно, если существует точка $u^* \in Z(x^*)$, такая, что $Ax^* + C'u^* = 0$, то из (14) следует (13), которое в случае знакоположительности матрицы A является достаточным условием оптимальности точки x^* в минимаксной задаче (3) при $\Omega = R^n$.

Замечание 2. Используя результаты работ [12], можно показать, что условие оптимальности (9) для минимаксной задачи (3), эквивалентно следующему условию:

$$\min_{q \in \Omega, \|q - x^*\| \le 1} \max_{u \in Z(x^*)} (Ax^* + C'u, q - x^*) = 0 .$$

ОБСУЖДЕНИЕ

В работе исследована непрерывная минимаксная задача (3), понимаемая как задача минимизации функции максимума вида (2). Характерная особенность данной задачи заключается в том что, требуется оптимизировать негладкую функцию (2), образованную с помощью операции максимума по аргументу $u \in U$ квадратичной функции (1). Следует отметить, что квадратичные функции обладают свойствами, важными для выпуклого анализа и имеют широкие приложения к задачам оптимизации в самой математике и многим другим прикладным задачам экономики и техники.

В работе показано, что для минимаксной задачи (3) существенны свойства выпуклости, непрерывности и дифференцируемости по направлениям функции максимума (2). Используя свойств функции максимума, получены теоремы существования и единственности решения задачи (3), а также необходимые и достаточные условия оптимальности. Эти результаты представляют интерес для разработки численного метода, основанного на построения направления наискорейшего спуска функции максимума.

Как следует из результатов общей теории негладких задач оптимизации и тенденций ее развития, изучение отдельных классов минимаксных задач представляет большой интерес с точки зрения получения таких результатов, которые важны для численных методов решения и разработки вычислительных алгоритмов. Результаты данного исследования также подтверждают эти высказывания.

ВЫВОДЫ

В работе изучена минимаксная задача (3) для класса квадратичных функций. Отдельное внимание обращено свойствам функции максимума вида (2). Основываясь на свойства функции максимума, указаны условия существования и единственности решения минимаксной задачи. Даны необходимые и достаточные условия оптимальности, а также выведены соответствующие следствия и приведены примеры применения полученных результатов.

Список литературы

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. –М.: Наука, 1979.
2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
3. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. –М.: Наука ,1982. - 432 с.
4. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М: Наука, 1988.
6. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. -СПб: Питер, 2000.
7. Карманов В. Г. Математическое программирование. –М.: Наука, 1986.
8. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. –М.: Мир, 1988.
9. Черноморов Г.А. Теория принятия решений. –Новочеркасск: 2002.
10. Малышев В.В. Методы оптимизации в задачах системного анализа и управления. М.: МАИ-ПРИНТ, 2010. - 440 с.
11. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. –М.: Наука, 1988.
12. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. –М.: Наука, 1972.
13. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
14. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука,1990.
15. Кейн В.М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. М.: Наука, 1982.
16. Отакулов С., Мусаев А.О. Применение свойства квазидифференцируемости функций типа минимума и максимума к задаче негладкой оптимизации.Colloqium-journal. Miedzynarodowe czasopismo naukowe. № 12(64), Warsawa(Polska), 2020. с. 55-60.
17. Отакулов С., Равшанов И.А. Свойства одного класса функций типа максимума и минимума и их применене к негладким задачам оптимизации. International scientific journal “Science and Innovation”, 2022, № 2. –p. 60-68.

18. Отакулов С., Хайдаров Т.Т. Условия оптимальности в негладкой задаче управления для динамической системы с параметром. Colloqium-journal. Miedzynarodowe czasopismo naukowe. № 13(66), 2020. -с. 18-22.
19. Otakulov S., Haydarov T.T., Sobirova G. D. On the time optimal control problem for controllable differential inclusion with parameter. Proceedings of Scholastico-2021, International Consortium on Academic Trends of Education and Science, April 2021. London, England. pp. 112-114.
20. Otakulov S., Rahimov B. Sh. On the structural properties of the reachability set of a differential inclusion. Proceedings of International Conference on Research Innovations in Multidisciplinary Sciences, March 2021. New York, USA. pp. 150-153.
21. Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. Lambert Academic Publishing, 2019.
22. Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. Time optimal control problem of ensemble trajectories of differential inclusion with delays. Journal of Advanced Research in dynamical and Control Systems, vol.12, issue 6, 2020. -p. 1043-1050.
23. Отакулов С., Холиярова Ф.Х. Задача управления по быстродействию ансамбля траекторий дифференциального включения с запаздыванием. Academic Research in Educational Sciences. vol.2, issue 3, 2021. -p. 778-788.
24. Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. On The Problem of Controllability an Ensemble of Trajectories for One Information Model of Dynamic Systems with Delay. International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT-2020). Tashkent, 4-6 November, 2020. Publiser: IEEE. -p.1-4.
25. Otakulov S., Rahimov B. Sh., Haydarov T.T. The nonsmoth optimal control problem for ensamble of trajectories of dynamic system under conditions of indeterminacy. Middle European Scientific Bulletin, vol. 5, 2020. -p. 38-42.
26. Отакулов С., Рахимов Б.Ш. Хайдаров Т.Т. Задача оптимизации квадратичной функции на неограниченном многогранном множестве.Science and Education. vol.1, Issue 2, 2020. -p.11-18.