СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ ТИПА МАКСИМУМА И МИНИМУМА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К НЕГЛАДКИМ ЗАДАЧАМ ОПТИМИЗАЦИИ

Отакулов Салим
Доктор физико-математических наук, профессор Джизакский политехнический институт
Равшанов Ислом Акмал ўғли
Самаркандский филиал Ташкентского Университета информационных технологий имени Мухаммада Ал-Хоразмий
https://doi.org/10.5281/zenodo.6614854

Аннотация. *В работе рассматривается один класс функций типа максимума и минимума. Изучены некоторые свойства этих функций, представляющие интерес для выпуклого и негладкого анализа. Показано применение этих свойств к задачам негладкой оптимизации.*

Ключевые слова: *функция максимума, функция минимума, негладкая задача, условия оптимальности.*

PROPERTIES OF THE ONE CLASS FUNCTIONS MAXIMUM AND MINIMUM TYPE AND ITS APPLICATION TO PROBLEM NONSMOOTH OPTIMIZATION

Abstract. *In the paper we considered one class nonsmooth functions maximum and minimum type. The some properties of this functions, which interested for the convex and nomsmooth analysis, is researched. Demonstrate a application of the properties to problem nonsmooth optimization.*

Keywords: *maximum function, minimum function, nonsmooth optimization, conditions of optimality.*

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели многих задач, связанных с вопросами принятия наилучшего решения в экономическом планировании и организации производства, проектировании технических устройств и управления технологическими процессами, приводят к различным классам задач математического программирования [1,2,3]. Методы математического программирования широко применяются в многошаговых процессах принятия решения и при разработке численных методов оптимизации в динамических системах управления [2, 3, 5,7].

В математическом программировании задачи и методы оптимизации недифференцируемых (негладких) функций является развивающимся направлением современного негладкого анализа [4,5,6,8]. Интенсивные исследования по вопросам разработки методов оптимизации негладких функций привели к расширению понятия дифференцируемости, введены и изучаются классы субдифференцируемых и квазидифференцируемых функций др.[4 –12]. Для таких функций развивается теория необходимых и достаточных условий оптимальности. Разрабатываются методы построения направления наискорейшего спуска негладкой функции и алгоритмы оптимизации.

Одним из подходов, приводимых к недифференцируемой оптимизации, является принцип минимакса [7], используемый при принятии решения в условиях неполноты информации о параметрах системы [13–15]. Этот принцип основан на минимизации (или максимизации) гарантированного значения критерия качества управления, выражаемого через операции предварительной оптимизации. Принцип минимакса (максимина) применяется также в игровых задачах управления.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ЦЕЛЬ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ.

Функции максимума и минимума составляют широкий класс негладких функций. Они могут иметь различную структуру и ограничения, от которых зависит их экстремальные свойства. Эффективность методов решения каждой негладкой задачи, представляемой как оптимизация функций типа максимума (или минимума) существенно зависит от свойств целевых функций и вида ограничений на их параметры [8,9,10,12].

Пусть R^n – n-мерное евклидово пространство, $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ – скалярное произведение векторов $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$, $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ – норма вектора $x\in R^n$.

Рассмотрим квадратичные функции

$$f_i(x)=(A_i x,x)+(b_i,x)+d_i,\ i=1,2,...,m, \tag{1}$$

где A_i – симметрическая $n\times n$-матрица, $b_i\in R^n, d_i\in R^1$, $i=\overline{1,m}$. Введем обозначения:

$$\varphi(x)=\max_{i=\overline{1,m}} f_i(x)=\max_{i=\overline{1,m}}[(A_i x,x)+(b_i,x)+d_i], \tag{2}$$

$$\varphi_*=\inf_{x\in\Omega}\max_{i=\overline{1,m}} f_i(x)=\inf_{x\in\Omega}\max_{i=\overline{1,m}}[(A_i x,x)+(b_i,x)+d_i],$$

где Ω – замкнутое подмножество R^n.

Рассмотрим задачу минимизации функции (2) на множестве Ω, т.е. задачу нахождения точки $x_*\in\Omega$, для которой имеет место равенство $\varphi(x_*)=\varphi_*$. Для этой задачи используем обозначение:

$$\max_{i=\overline{1,m}}[(A_i x,x)+(b_i,x)+d_i]\to \min,\ x\in\Omega. \tag{3}$$

В поставленной задаче требуется найти минимум функции максимума (2), и поэтому ее можно назвать минимаксной задачей для квадратичных функций вида (1). Задача (3) относится классу дискретных минимаксных задач математического программирования [4].

Используя функции вида (1) можно рассмотреть также задачу максимизации функции

$$\psi(x)=\min_{i=\overline{1,m}} f_i(x)=\min_{i=\overline{1,m}}[(A_i x,x)+(b_i,x)+d_i],\ x\in\Omega, \tag{4}$$

т.е. максиминную задачу

$$\min_{i=\overline{1,m}}[(A_i x,x)+(b_i,x)+d_i]\to \max,\ x\in\Omega, \tag{5}$$

в которой требуется найти точку $x^*\in\Omega$, такую, что $\psi(x^*)=\psi^*$, где

$$\psi^*=\sup_{x\in\Omega}\min_{i=\overline{1,m}} f_i(x)=\sup_{x\in\Omega}\min_{i=\overline{1,m}}[(A_i x,x)+(b_i,x)+d_i].$$

Следует отметить, что максиминную задачу (5) также можно привести к минимаксной задаче:

$$\max_{i=\overline{1,m}}[(\tilde{A}_i x, x) + (\tilde{b}_i, x) + \tilde{d}_i] \to \min, x \in \Omega$$

где $\tilde{A}_i = -A$, $\tilde{b}_i = -b_i$, $\tilde{d}_i = d_i$.

В практике возникают также задачи вида:

$$\{\max_{i=\overline{1,m}}[(A_i x, x) + (b_i, x) + d_i] + \min_{i=\overline{1,k}}[(\bar{A}_i x, x) + (\bar{b}_i, x) + \bar{d}_i]\} \to \min, x \in \Omega, \qquad (6)$$

$$\{\max_{i=\overline{1,m}}[(A_i x, x) + (b_i, x) + d_i] + \min_{i=\overline{1,k}}[(\bar{A}_i x, x) + (\bar{b}_i, x) + \bar{d}_i]\} \to \max, x \in \Omega. \qquad (7)$$

Для изучения задач вида (3), (5), (6) и (7) необходимо изучение свойств функций типа максимума (2) и минимума (4). В первую очередь, представляет интерес выяснение таких условий, при которых функции этих типов обладают экстремальными свойствами выпуклых (или вогнутых) функций. Для изучения свойств функций вида (1), (2) и (4) можно использовать методы выпуклого и негладкого анализа. Отметим, что для разработки численных методов оптимизации рассматриваемых функций необходимо научиться, как построит направления спуска таких функций. В этих вопросах можно воспользоваться методами субдифференциального и квазидифференциального исчисления [4,5,7,8].

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

А. Свойства функций максимума и минимума. Изучим некоторые свойства функции максимума вида (2).

Лемма 1. Функция максимума вида (2) непрерывна на R^n. Она будет выпуклой, если все матрицы A_i – знакоположительны ($A_i \geq 0$, т.е. $(A_i x, x) \geq 0 \quad \forall x \in R^n$). А если матрицы A_i, $i = \overline{1,m}$ –положительно определены ($A_i > 0$, т.е. $(A_i x, x) > 0 \quad \forall x \neq 0$), то функция максимума (2) строго выпукла.

Доказательство. В самом деле, непрерывность функции

$$\varphi(x) = \max_{i=\overline{1,m}}[(A_i x, x) + (b_i, x) + d_i]$$

в произвольной точке $x^0 \in R^n$ следует из неравенства

$$\|\varphi(x) - \varphi(x^0)\| \leq \max_{i=\overline{1,m}}\|A_i(x - x^0)\|\|x^0\| + \max_{i=\overline{1,m}}\|A_i x^0\|\|x - x^0\|, \; x \in R^n.$$

Если все матрицы A_i – знакоположительны, то функции вида (1) выпуклы на R^n, и следовательно выпуклой является функция максимума (2).

В случаи, когда матрицы $A_i, i = \overline{1,m}$ положительно определены, то функции вида (1) строго выпуклы на R^n, и следовательно строго выпуклой является функция максимума (2).

Следствие 1. Функция минимума вида (4) непрерывна на R^n, и она будет вогнутой, если все матрицы A_i – знакоотрицательны ($A_i \leq 0$, т.е. $(A_i x, x) \leq 0 \quad \forall x \in R^n$). А если матрицы $A_i, i = \overline{1,m}$ – отрицательно определены($A_i < 0$,т.е. $(A_i x, x) < 0 \quad \forall x \neq 0$), то функция минимума (4) – строго вогнутая.

Введем обозначения:

$$J^*(x) = \{i \in I_m : f_i(x) = \varphi(x)\}, \; J_*(x) = \{i \in I_m : f_i(x) = \psi(x)\}, I_m = \{1,2,...,m\}, \; x \in R^n,$$

где функции $f_i(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены формулами (1), (2) и (4) соответственно.

Лемма 2. Для любого вектора $x^0 \in R^n$ существует число $\alpha_0 = \alpha_0(x^0) > 0$ такое, что для всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$ и векторов $g \in R^n$, $\|g\| = 1$ имеют места равенства:

$$\varphi(x^0 + \alpha g) = \max_{i \in J^*(x^0)} f_i(x^0 + \alpha g), \tag{8}$$

Доказательство. Справедливость соотношения (8) достаточно доказать для случая $J^*(x^0) \neq I$. Положим

$$\tilde{J}^*(x^0) = I_m \setminus J^*(x^0), \beta = \varphi(x^0) - \max_{i \in \tilde{J}^*(x^0)} f_i(x^0).$$

Ясно, что $\beta > 0$. Тогда для всех $\alpha > 0$ имеем:

$$f_i(x^0 + \alpha g) - \varphi(x^0) = f_i(x^0 + \alpha g) - f_i(x^0) \geq \alpha \min_{i=\overline{1,m}} \min_{\|g\|=1} (A_i x^0 + b_i, g) +$$

$$+ \alpha^2 \min_{i=\overline{1,m}} \min_{\|g\|=1} (A_i g, g), \forall i \in J^*(x^0), \tag{9}$$

$$f_i(x^0 + \alpha g) - f_i(x^0) \leq \alpha \max_{i=\overline{1,m}} \max_{\|g\|=1} (A_i x^0 + b_i, g) + \alpha^2 \max_{i=\overline{1,m}} \max_{\|g\|=1} (A_i g, g), \forall i \in \tilde{J}^*(x^0). \tag{10}$$

Используем также очевидное равенство

$$\alpha \min_{i=\overline{1,m}} \min_{\|g\|=1} (A_i x^0 + b_i, g) + \alpha^2 \min_{i=\overline{1,m}} \min_{\|g\|=1} (A_i g, g) = -\alpha \max_{i=\overline{1,m}} \max_{\|g\|=1} (A_i x^0 + b_i, g) -$$

$$-\alpha^2 \max_{i=\overline{1,m}} \max_{\|g\|=1} (A_i g, g) \, \forall \alpha \geq 0. \tag{11}$$

Теперь, в качестве числа $\alpha_0 = \alpha_0(x^0) > 0$ берем положительный корень уравнения

$$\alpha \max_{i=\overline{1,m}} \max_{\|g\|=1} (A_i x^0 + b_i, g) + \alpha^2 \max_{i=\overline{1,m}} \max_{\|g\|=1} (A_i g, g) = \frac{1}{3}\beta . \tag{12}$$

Тогда в силу определения числа $\beta > 0$ и соотношений (9)–(12) следует, что

$$f_i(x^0 + \alpha g) \geq \varphi(x^0) - \frac{1}{3}\beta, \ \forall i \in J^*(x^0),$$

$$f_i(x^0 + \alpha g) \leq \varphi(x^0) - \frac{2}{3}\beta, \ \forall i \in \tilde{J}^*(x^0).$$

Из этих двух последних соотношений получим:

$$f_i(x^0 + \alpha g) \geq \varphi(x^0) - \frac{1}{3}\beta \geq \max_{i \in \tilde{J}^*(x^0)} f_i(x^0 + \alpha g) + \frac{1}{3}\beta > \max_{i \in \tilde{J}^*(x^0)} f_i(x^0 + \alpha g), \ \forall i \in J^*(x^0),$$

т.е. имеет место равенство (8).

Замечание. Доказанная лемма 2 показывает, что $J^*(x^0 + \alpha g) \subset J^*(x^*)$ при всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$ и $g \in R^n$, $\|g\| = 1$.

Следствие 2. Для любого вектора $x^0 \in R^n$ существует число $\alpha_0 = \alpha_0(x^0) > 0$ такое, что для всех $\alpha \in (0, \alpha_0)$ и векторов $g \in R^n$, $\|g\| = 1$ имеют место равенство

$$\psi(x^0 + \alpha g) = \min_{i \in J_*(x^0)} f_i(x^0 + \alpha g).$$

Каждая функция максимума (2) и функция максимума (4) не обладают свойством дифференцируемости в некоторых точках области определения. Но такого типа функций имеют производные по направлениям [4]. Используя лемму 2 и следствие 2, получим следующий результат.

Теорема 1. Функция максимума (2) и функция минимума (4) в каждой точке $x^0 \in R^n$ имеют производную по произвольному направлению $g \in R^n$, $\|g\| = 1$, т.е. существует конечные пределы

$$\frac{\partial\varphi(x^0)}{\partial g} = \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\varphi(x^0+\alpha g)-\varphi(x^0)}{\alpha},$$

$$\frac{\partial\psi(x^0)}{\partial g} = \lim_{\alpha\to 0+} \frac{\psi(x^0+\alpha g)-\psi(x^0)}{\alpha}$$

и справедливы равенства

$$\frac{\partial\varphi(x^0)}{\partial g} = \max_{i\in J^*(x^0)} (2A_i x^0 + b_i, g), \qquad \frac{\partial\varphi(x^0)}{\partial g} = \min_{i\in J_*(x^0)} (2A_i x^0 + b_i, g). \qquad (13)$$

Следствие 3. Линейная комбинация функций максимума и минимума вида (2), (4), т.е. функция $\gamma(x) = \lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)$, $\lambda, \mu \in R^1$ в каждой точке $x^0 \in R^n$ имеет производную по произвольному направлению $g \in R^n$, $\|g\| = 1$ и справедливо равенство

$$\frac{\partial\lambda(x^0)}{\partial g} = \lambda \max_{i\in J^*(x^0)} (2A_i x^0 + b_i, g) + \mu \min_{i\in J_*(x^0)} (2A_i x^0 + b_i, g).$$

B. Условия существования решений и оптимальности в минимаксной и максиминной задачах. Изученные свойства функции максимума и минимума позволяют выяснить важные свойства решений минимаксной задачи (3) и максиминной задачи (5). Сначала приведем теорему существования и единственности решения этих задач.

Теорема 1. Пусть среды матриц $A_i, i = \overline{1,m}$ есть положительно определенная матрица A_{i^*} ($A_{i^*} > 0$, т.е. $(A_i x, x) > 0\ \forall x \neq 0$) и Ω – замкнутое подмножество R^n. Тогда решение задачи (3) существует, т.е. функция максимума (2) на любом замкнутом множестве Ω из R^n имеет точку глобального минимума. Если все матрицы $A_i, i = \overline{1,m}$, положительно определены, Ω – выпуклое и замкнутое множество из R^n, то решение задачи (3) единственно.

Доказательство. В самом деле, если $A_{i^*} > 0$, то $\min_{\|x\|=1}(A_{i^*} x, x) = m > 0$,

$$f_{i^*}(x) = (A_{i^*} x, x) + (b_{i^*}, x) + d_{i^*}] \geq m\|x\|^2 - \|b_{i^*}\|\|x\| - |d_{i^*}|.$$

Следовательно. $f_{i^*}(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$. Поскольку

$$\varphi(x) = \max_{i=\overline{1,m}} [(A_i x, x) + (b_i, x) + d_i] \geq (A_{i^*} x, x) + (b_{i^*}, x) + d_{i^*}],$$

то $\varphi(x) \to \infty$, $\|x\| \to \infty$. Следовательно, учитывая непрерывность функции $\varphi(x)$ и замкнутость Ω заключаем, что при любом $x^0 \in R^n$ множество $M(x^0) = \{x \in \Omega : \varphi(x) \leq \varphi(x^0)\}$ замкнуто и ограничено. Теперь в силу теоремы Вейерштрасса точка глобального минимума функции $\varphi(x)$ на множестве $M(x^0)$

существует, причем это и есть точка глобального минимума функции $\varphi(x)$ на Ω. Существование решения задачи (3) доказано.

В случаи, если $A_i > 0, i=\overline{1,m}$, то согласно лемме 1 функция $\varphi(x)$ строго выпукла, и следовательно она имеет единственную точку глобального минимума на выпуклом и замкнутом множестве Ω, т.е. решение задачи (3) единственно. Теорема доказана.

Следствие 4. Пусть среды матриц $A_i, i=\overline{1,m}$ есть отрицательно определенная матрица A_{i^*} ($A_{i^*} < 0$, т.е. $(A_i x, x) < 0\ \forall x \neq 0$) и Ω – замкнутое подмножество R^n. Тогда решение задачи (5) существует, т.е. функция минимума (4) на любом замкнутом множестве Ω из R^n имеет точку глобального максимума. Если $A_i < 0, i=\overline{1,m}$, Ω – выпуклое и замкнутое множество из R^n, то решение задачи (5) единственно.

Следствие 5. Пусть среды матриц $A_i, i=\overline{1,m}$ есть положительно определенная матрица A_{i^*}, а все матрицы $\overline{A}_i, i=\overline{1,k}$ положительно определены и Ω – замкнутое подмножество R^n. Тогда решение задачи (6) существует.

Следствие 6. Пусть среды матриц $\overline{A}_i, i=\overline{1,k}$ есть отрицательно определенная матрица $\overline{A}_{i^*}$, а все матрицы $A_i, i=\overline{1,m}$ отрицательно определены и Ω – замкнутое подмножество R^n. Тогда решение задачи (7) существует.

Теорема 3. Пусть точка $x^0 \in \operatorname{int}\Omega$ есть решение минимаксной задачи (3). Тогда справедливо неравенство

$$\inf_{\|g\|=1} \max_{i \in J^*(x^0)} (2A_i x^0 + b_i, g) \geq 0. \tag{14}$$

Если матрицы $A_i, i=\overline{1,m}$ знакоположительны и неравенство (14) имеет место при некотором $x^0 \in \Omega$, то точка x^0 – решение задачи (3).

Доказательство. Предположим, что точка $x^0 \in \operatorname{int}\Omega$ является решением минимаксной задачи (3), т.е. $\varphi(x^0) = \min_{x\in\Omega} \varphi(x)$. Значит, для любого $g \in R^n, \|g\|=1$ и достаточно малого $\alpha > 0$ имеем: $\varphi(x^0 + \alpha g) \geq \varphi(x^0)$. Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi(x^0)}{\partial g} = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{\varphi(x^0 + \alpha g) - \varphi(x^0)}{\alpha} \geq 0.$$

В силу (13) отсюда получим (14).

Переходим доказательству второй части теоремы. Если матрицы $A_i, i=\overline{1,m}$ знакоположительны, то согласно лемме 1 функция максимума $\varphi(x)$ вида (2) будет выпуклой на R^n. Теперь предположим, что для точки $x^0 \in \Omega$ имеет место неравенство (14), но x^0 не является решением задачи (3). Тогда, существует точка $x^* \in \Omega$ такая, что $\varphi(x^*) < \varphi(x^0)$. Поскольку функция $\varphi(x)$ выпуклая, то для всех $\alpha \in [0,1]$ имеем $\varphi(x^0 + \alpha(x^* - x^0)) \leq (1-\alpha)\varphi(x^0) + \alpha\varphi(x^*)$.

В последнем неравенстве положим $\alpha = \dfrac{\beta}{\left\| x^* - x^0 \right\|}$, $0 < \beta < \left\| x^* - x^0 \right\|$. Тогда обозначая $g^* = \dfrac{x^* - x^0}{\left\| x^* - x^0 \right\|}$ и имеем:

$$\varphi(x^0 + \beta g^*) - \varphi(x^0) \le (1 - \frac{\beta}{\left\| x^* - x^0 \right\|})\varphi(x^0) + \frac{\beta}{\left\| x^* - x^0 \right\|}\varphi(x^*) - \varphi(x^0) =$$

$$= \frac{\beta}{\left\| x^* - x^0 \right\|}[\varphi(x^*) - \varphi(x^0)] < 0 .$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi(x^0)}{\partial g^*} = \lim_{\beta \to 0+} \frac{\varphi(x^0 + \beta g^*) - \varphi(x^0)}{\beta} < 0 .$$

А это в силу (13) означает, что $\max\limits_{i \in J^*(x^0)} (2A_i x^0 + b_i, g^*) < 0$. Поскольку $\left\| g^* \right\| = 1$, то последнее противоречить условию (14). Полученное противоречие показывает, что при выполнении условия (14) точка x^0 является решением задачи (3). Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть точка $x^0 \in \operatorname{int}\Omega$ есть решение максиминной задачи (5). Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{\|g\|=1} \inf_{i \in J_*(x^0)} (2A_i x^0 + b_i, g) \le 0 . \qquad (15)$$

Если матрицы $A_i, i = \overline{1,m}$ – знакоотрицательны и неравенство (15) имеет место при некотором $x^0 \in \Omega$, то точка x^0 – решение задачи (5).

Доказательство аналогично теореме 3.

Из этих теорем получим следствия для задач (6) и (7).

Следствие 7. Пусть точка $x^0 \in \operatorname{int}\Omega$ есть решение задачи (6). Тогда справедливо неравенство

$$\inf_{\|g\|=1} [\max_{i \in J^*(x^0)} (2A_i x^0 + b_i, g) + \inf_{i \in \bar{J}_*(x^0)} (2\bar{A}_i x^0 + \bar{b}_i, g)] \ge 0 , \qquad (16)$$

где $\bar{J}_*(x) = \{ i \in I_k : \bar{f}_i(x) = \bar{\psi}(x) \}$, $\bar{f}_i(x) = (\bar{A}_i x, x) + (\bar{b}_i, x) + \bar{d}_i$, $\bar{\psi}(x) = \min\limits_{i=1,k} \bar{f}_i(x)$.

Следствие 8. Пусть точка $x^0 \in \operatorname{int}\Omega$ есть решение задачи (7). Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{\|g\|=1} [\max_{i \in J^*(x^0)} (2A_i x^0 + b_i, g) + \inf_{i \in \bar{J}_*(x^0)} (2\bar{A}_i x^0 + \bar{b}_i, g)] \le 0 . \qquad (17)$$

Замечание 2. Условия (16) и (17) приведены лишь в качестве необходимых условий оптимальности в задачах (6) и (7). Они характерны для задач оптимизации квазидифференцируемых функций, к которым относятся также и задачи вида (6) и (7).

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены классы функций типа максимума и минимума вида (2) и (4), которые составлены на базе квадратичной функции (1). Указаны условия на матриц $A_i, i = \overline{1,m}$, которые достаточны для выпуклости(вогнутости) функции максимума (2) (минимума (4)). Показана непрерывность таковых функций. Эти функции не обладают свойством дифференцируемости. Показана дифференцируемость по направлениям рассмотренных функций типа максимума и минимума, а также даны формулы для вычисления этих производных по направлениям.

Изученные свойства функций максимума и минимума применены для исследования минимаксной и максиминной задач вида (3) и (5). Выяснены условий существования и единственности этих задач. Доказаны необходимые и достаточные условия оптимальности в рассмотренных задачах (3) и (5). Эти условия выражаются соотношениями (14), (15), дающие оценки производных по направлениям на единичной сфере $\|g\| = 1, \quad g \in R^n$. Из этих условий оптимальности выведены соответствующие следствия для задач вида (6) и (7).

Результаты получены с использованием теории выпуклого и негладкого анализа [4,8]. Они являются развитием результатов теории функций типа максимума и минимума. Их можно применить для разработке алгоритмов построения оптимального решения в минимаксных и максиминных задач рассмотренных типов.

Список литературы

1. Малышев В.В. Методы оптимизации в задачах системного анализа и управления. М.: МАИ-ПРИНТ, 2010. - 440 с.
2. Умнов А.Е. Методы математического моделирования. – М.: МФТИ, 2012. - 295 с.
3. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. -М.: Наука ,1982. - 432 с.
4. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. –М.: Наука, 1972.-368 с.
5. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М.: Наука ,1990. -432 с.
6. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука,1988. - 280 с.
7. Кейн В.М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. М.: Наука, 1982. -248 с.
8. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. –М.: Наука, 1981. -384 с.
9. Отакулов С., Мусаев А.О. Применение свойства квазидифференцируемости функций тпа минимума и максимума к задаче негладкой оптимизации.Colloqium-journal. Miedzynarodowe czasopismo naukowe. № 12(64), Warsawa(Polska), 2020. с. 55-60. DOI. 10.24411/2520-6990-2020-11795.
10. Отакулов С., Хайдаров Т.Т. Условия оптимальности в негладкой задаче управления для динамической системы с параметром. Colloqium-journal. Miedzynarodowe czasopismo naukowe. № 13(66), 2020. с. 18-22. DOI.10.24411/2520-6990-2020-11847.
11. Отакулов С., Рахимов Б.Ш. Хайдаров Т.Т. Задача оптимизации квадратичной функции на неограниченном многогранном множестве.Science and Education. Vol.1, Issue 2, 2020. pp.11-18.

12. Отакулов С., Хайдаров Т.Т. Свойства функций типа максимума и минимума и их применение к негладким задачам оптимизации. Tadqiqot.uz. Physical and mathematical scinces. Vol. 3, Issue 1. pp.32-37. Doi: http://dx.doi.org/10.26739/2181-0656-2020-3-7

13. Отакулов С., Рахимов Б.Ш. Об условиях управляемости ансамбля траекторий дифференциальных включений. Tadqiqot.uz. Physical and mathematical scinces. Vol. 3, Issue 1. pp.45-50. Doi: http://dx.doi.org/10.26739/2181-0656-2020-3-9

14. Otakulov S., Haydarov T.T., Sobirova G. D. On the time optimal control problem for controllable differential inclusion with parameter. Proceedings of Scholastico-2021, International Consortium on Academic Trends of Education and Science, April 2021. London, England. pp. 112-114.

15. Otakulov S., Rahimov B. Sh. On the structural properties of the reachability set of a differential inclusion. Proceedings of International Conference on Research Innovations in Multidisciplinary Sciences, March 2021. New York, USA. pp. 150-153.