НЕГЛАДКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОТЫ ИНФОРМАЦИИ

Отакулов Салим

Доктор физ.-мат. наук, проф., Джизакский политехничекий институт

Хайдаров Тулкинжон Тургунбаевич

Преподаватель, Джизакский политехнический институт,

https://doi.org/10.5281/zenodo.6520129

Аннотация. *В работе рассмотрена задача оптимального управления минимаксного типа для модели динамической системы в условиях неопределенности. В данной негладкой задаче оптимизации получены необходимые и достаточные условия оптимальности.*

Ключевые слова: *система управления, дифференциальное включение, негладкий функционал, условия оптимальности.*

THE NONSMOTH OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR MODEL DYNAMIC SYSTEM UNDER CONDITIONS OF INCOMPLETE INFORMATION

Abstract. *In this paper we considered optimal control problem minimax type for model of dynamic system under conditions of indeterminacy. In this problem the necessary and sufficient conditions of optimality are obtained.*

Keywords: *control system, differential inclusion, nonsmooth functional, minimax problem, conditions of optimality.*

1. Введение. Многие прикладные задачи, встречающихся в экономическом планировании и организации производства, при проектировании технических устройств и управления технологическими процессами, приводят негладким задачам оптимизации [1-3]. Для различных классов негладких функций изучены необходимые и достаточные условия оптимальности, разработаны методы поиска направлений спуска и алгоритмы оптимизации [2–4]. Развивается негладкий анализ, все более расширяется область его приложений к задачам оптимизации.

Задачи управления и наблюдения в условиях неопределенности (информационных ограничений) составляют большой класс задач математической теории оптимального управления. В исследованиях таких задач большое значение приобретают методы многозначного анализа и теории дифференциальных включений [5–9]. Дифференциальные включения имеют важные приложения в теории оптимального управления и в других областях математических и прикладных исследований. Одним из развивающихся направлением в теории дифференциальных включений и их приложениям, является дифференциальные включения с управляющими и другими параметрами [6–12]. Исследование таких моделей представляют большой интерес для задач управления в условиях ограниченности информации.

В данной работе рассматривается динамическая система управления с параметром внешних воздействий и неточным начальным состоянием, причем информация о них ограничивается лишь заданием множества возможных значений. Сформулирована задача управления ансамблем траекторий системы в виде негладкой задачи минимаксного типа. Результаты данной работы развивают исследования [10,11].

2. Модель динамической системы управления в условиях неполноты информации. Используем обозначение: R^n – n-мерное евклидово пространство векторов x, $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ – норма вектора x, (x,y) – скалярное произведение векторов x и y. Рассмотрим динамическую систему, состояние которой $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ на заданном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ определяется как решение векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u,w), t \in T \, . \qquad (1)$$

В данной модели динамической системы имеются параметры двух типов: $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ – параметры управления; $w = (w_1, w_2, ..., w_k)$ – параметры внешних воздействий. В качестве допустимых управлений будем выбирать измеримые функции $u = u(t), t \in T$, принимающие значения из компакта $U \subset R^m$. Информация о параметрах внешних воздействий минимальна, т.е. будем считать, что они представляют собой некоторую измеримую функцию $w = w(t), t \in T$, со значениями из компакта $W \subset R^k$, причем конкретная их реализация в процессе управления заранее неизвестно. Кроме того, будем предполагать, что начальное состояние системы $x(t_0)$ также неизвестно заранее и задано лишь ограничение на допустимые значения этой величины, а именно $x(t_0) \in D$, где D– компакт из R^n. При таких предположениях рассматриваемое уравнение (1) представляет собой модель систему управления в условиях информационных ограничений относительно внешних возмущающих сил и начального состояния.

Множество всех допустимых управлений $u(t), t \in T$ обозначим U_T, а множество всех возможных реализаций $w(t), t \in T$ внешних возмущающих сил обозначим W_T.Чтобы при конкретной реализации параметров $u(\cdot) \in U_T$ и $w(\cdot), \in W_T$, а также начального состояния $x(t_0) = x^0$, можно было определить единственную абсолютно непрерывную траекторию $x = x(t, x^0, u(\cdot), w(\cdot))$, на правую часть уравнения следует налагать определенные условия [24], например, измеримость компонент n-вектор функции $f(t,x,u,w)$ по переменной $t \in T$, непрерывность по совокупности переменных $(x,u,w) \in R^n \times V \times W$ и ограничение на рост функции $f(t,x,u,w)$ вида $\|f(t,x,u,w)\| \leq m(t)(\|x\| + \|u\| + \|w\|)$ или вида $|(x,\dot{x})| \leq m(t)(\|x\|^2 + \|u\| + \|w\|)$, где $m(t)$– неотрицательная суммируемая на $T = [t_0, t_1]$ функция.

Предполагая выполненными условия существования и единственности траекторий системы (1) при заданном $u(\cdot)\in U_T$ в каждый момент времени $t\in T$ определим множество

$$X(t,D,u(\cdot),W_T)=\{x(t,x^0,u(\cdot),w(\cdot))\,|\,x^0\in D,u(\cdot)\in U_T,w(\cdot)\in W_T\}, \qquad (2)$$

объединяющее все траектории системы при всевозможных значениях начального состояния и внешних возмущающих сил. Будем говорить, что многозначное отображение $t\to X(t,D,u(\cdot),W_T),t\in T$ является ансамблем траекторий системы (1), порожденным множеством начальных состояний D, управлением $u(\cdot)\in U_T$ и множеством внешних воздействий W_T.

Ансамбль траекторий характеризует динамику систему управления в условиях неполноты информации относительно параметров $(x_0,u(\cdot),w(\cdot))$. Для данной системы представляет интерес также семейство $H(D,u(\cdot),W_T)$ всех абсолютно непрерывных траекторий $x(t,x^0,u(\cdot),w(\cdot)),t\in T$, соответствующих управлению $u(\cdot)\in U_T$ и всевозможным парам $(x^0,w(\cdot))\in D\times W_T$. При заданных выше условиях на правую часть уравнения (1) множество $H(D,u(\cdot),W_T)$ является предкомпактным множеством пространства непрерывных на $T=[t_0,t_1]$ n-вектор функций $C^n(T)$ с нормой $\|x(\cdot)\|_{C^n(T)}=\max_{t\in T}\|x(t)\|_{R^n}$. При дополнительном условии выпуклости и замкнутости множества $f(t,x,u,W)=\bigcup_{w\in W}f(t,x,u,w)$ семейство $H(D,u(\cdot),W_T)$ будет компактом пространства $C^n(T)$. Отметим, что свойства ансамбля траекторий $X(t,D,u(\cdot),W_T),t\in T$ и семейства абсолютно непрерывных траекторий $H(D,u(\cdot),W_T)$ можно получить как следствие из результатов теории дифференциальных включений. Чтобы убедится на это нам достаточно представить рассматриваемую систему управления в виде управляемого дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt}\in F(t,x,u),t\in T, \qquad (3)$$

где $F(t,x,u)=f(t,x,u,W)$. При сделанных на правую часть уравнения (1) допущениях, рассматриваемая система управления в условиях неполноты информации о параметрах $w\in W$ описывается дифференциальным включением (3).

3. Метод исследования. Линейное управляемое дифференциальное включение. Рассмотрим систему с неполными данными, которая описывается дифференциальным включением с параметром управления:

$$\frac{dx}{dt}\in A(t)x+B(t,u), t\in T. \tag{4}$$

где $x-n$-вектор состояния, $u-m$-вектор управления со значениями из компакта $U\subset R^m$, $A(t)$ – $n\times n$-матрица, $B(t,u)$ – непустой компакт из R^n. На правую часть дифференциального включения (4) будем налагать следующие условия: 1) элементы матриц $A(t)$ суммируемы на $T=[t_0,t_1]$; 2) отображение $(t,u)\to B(t,u)$ измеримо по $t\in T$ и непрерывно по $u\in U$, причем $\sup\limits_{\gamma\in b(t,u)}\|\gamma\|\le\beta(t),\ \forall(t,u)\in T\times V$, где $\beta(t)$ –суммируемая на T функция.

Пусть $H(D,u(\cdot))$ – множество абсолютно непрерывных траекторий $x=x(t,x^0,u(\cdot))$ дифференциального включения (4), соответствующих управлению $u(\cdot)\in U_T$ и всевозможным начальным состояниям $x(t_0)=x^0$ из заданного компакта: $x(t_0)\in D$. При дополнительном условии выпуклости значений многозначного отображения $(t,u)\to B(t,u)$ и выпуклости компакта D множество $H(D,u(\cdot))$ является выпуклым компактом из $C^n(T)$.

Теперь рассмотрим ансамбль траекторий дифференциального включения (4), т.е. многозначное отображение $t\to X(t,D,u(\cdot)), t\in T$, определяемое как $X(t,D,u(\cdot))=\{\xi\in R^n:\xi=x(t),\ x(\cdot)\in H(D,u(\cdot))\}, t\in T$. Каждое значение данного многозначного отображения является множеством достижимости дифференциального включения при $u(\cdot)\in U_T$ и $x(t_0)\in D$.

Из компактности и выпуклости множества $H(D,u(\cdot))$ следует компактность и выпуклость значений многозначного отображения $t \to X(t,D,u(\cdot)), t \in T$. Однако, свойства выпуклости и замкнутости множеств достижимости $X(t,D,u(\cdot)), t \in T$ дифференциального включения (4) имеют места без предположения выпуклости значений многозначного отображения $(t,u) \to B(t,u)$, если только потребовать выпуклость и компактность начального множества D. Это утверждение вытекает из следующего представления множества достижимости [8]:

$$X(t,D,u(\cdot)) = F(t,t_0)D + \int_{t_0}^{t} F(t,\tau)B(\tau,u(\tau))d\tau, \qquad (5)$$

где $F(t,\tau)$ –фундаментальная матрица решений уравнения $\frac{dx}{dt} = A(t)x,\ F(\tau,\tau) = E$ (E – единичная матрица).

В (5) множество $X(t,D,u(\cdot)), t \in T$ представлено как алгебраическая сумма двух множеств. При компактности начального множества D множество $F(t,t_0)D$ также будет компактом R^n, при дополнительном условии выпуклости D, выпуклым компактом. Следовательно, при сделанных допущениях относительно правой части дифференциального включения (4) и начального множества D множество достижимости всегда компактно, а при дополнительном условии выпуклости D оно является выпуклым компактом из R^n.

Теперь предполагая в дальнейшем, что начальное множество является выпуклым компактом можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 1. Множество достижимости $X(t,D,u(\cdot)), t \in T$ является выпуклым компактом R^n, причем его опорная функция выражается формулой:

$$C(X(t,D,u(\cdot)),\psi) = C(F(t,t_0)D,\psi) + \int_{t_0}^{t} C(F(t,\tau)B(\tau,u(\tau)),\psi)d\tau, \psi \in R^n. \qquad (6)$$

Для моделей вида (4) одним из важных вопросов является задача управления ансамблем траекторий по некоторому критерию оптимизации. Одним из таких критериев, часто используемых в задачах оптимизации, является терминальный функционал $J(x(\cdot)) = g(x(t_1))$, $x(\cdot) \in H(D,u(\cdot))$, где $g(\xi)-$ заданная функция аргумента $\xi \in R^n$. Гарантированным значением данного функционала для системы (4) назовем величину $\Phi(D,u(\cdot)) = \sup\limits_{x(\cdot)\in H(D,u(\cdot))} J(x(\cdot))$. Учитывая вид терминального функционала $J(x(\cdot)) = g(x(t_1))$, нетрудно заметить, что $\Phi(D,u(\cdot)) = \sup\limits_{\xi\in X(t_1,D,u(\cdot))} g(\xi)$.

Теперь рассмотрим следующую задачу управления ансамблем траекторий системы (4):

$$\Phi(D,u(\cdot)) = \sup_{\xi\in X(t_1,D,u(\cdot))} g(\xi) \to \min, u() \in U_T. \tag{7}$$

Предположим, что в задаче (7) функция $g(\xi)$, $\xi \in R^n$ имеет вид

$$g(\xi) = \min_{z\in Z} \max_{m\in M} (z, P\xi + m), \tag{8}$$

где $P-$ $s \times n$-матрица, $Z-$ выпуклый компакт, $M-$ компакт из R^s. Данную функцию можно записать так:

$$g(\xi) = \min_{z\in Z}[(z, P\xi) + \max_{m\in M}(m,z)] = \min_{z\in Z}[(z, P\xi) + C(M,z)].$$

Задача (7) является минимаксной управления ансамблем траекторий системы (4) с терминальным функционалом.

4. Основные результаты. В рассматриваемой задаче терминальный функционал $g(\xi)$, $\xi \in R^n$ обладает свойством вогнутости. Будем использовать представление функционала $\Phi(D,u(\cdot)) = \sup\limits_{\xi\in X(t_1,D,u(\cdot))} g(\xi)$, которое получается после применения известной теоремы о минимаксе из выпуклого анализа [4,5]:

$$\Phi(D,u(\cdot)) = \min_{z\in Z}[C(X(t_1,D,u(\cdot)), P'z) + C(M,z)]. \tag{9}$$

Учитывая формулу (6) равенство (9) запишем в следующем виде:

$$\Phi(D,u(\cdot))=\min_{z\in coZ}[C(F(t_1,t_0)D,P'z)+C(M,z)+\int_{t_0}^{t_1}C(F(t_1,t)B(t,u(t)),P'z)dt]. \qquad (10)$$

Пусть $\psi(t,z)-$ абсолютно непрерывное решение уравнения $\frac{d\psi}{dt}=-A'(t)\psi$ с начальным условием $\psi(t_1)=P'z$. Такая функция имеет представление $\psi(t,z)=F'(t_1,t)P'z$. Тогда равенство (10) можем записать в виде:

$$\Phi(D,u(\cdot))=\min_{z\in coZ}[C(D,\psi(t_0,z))+C(M,z)+\int_{t_0}^{t_1}C(B(t,u(t)),\psi(t,z))dt]. \qquad (11)$$

Теорема 1. Пусть $u^0(t),t\in T-$ оптимальное управление в задаче (7). Тогда почти для всех $t\in T$ имеет место равенство

$$C(B(t,u^0(t)),\psi^0(t))=\min_{u\in U}C(B(t,u),\psi^0(t)), \qquad (12)$$

где $\psi^0(t)=\psi(t,z^0)$, z^0- произвольная точка глобального минимума функции

$$\eta^0(z)=C(D,\psi(t_0,z))+C(M,z)+\int_{t_0}^{t_1}C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z))dt \qquad (13)$$

на множестве Z.

Доказательство. Если $u^0(t),t\in T-$ оптимальное управление в задаче (7), то $\Phi(D,u^0(\cdot))\le\Phi(D,u(\cdot))\quad\forall u(\cdot)\in U_T$, т.е. согласно (10)

$$\begin{aligned}&\min_{z\in Z}[C(D,\psi(t_0,z))+C(M,z)+\int_{t_0}^{t_1}C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z))dt]\le\\&\le\min_{z\in Z}[C(D,\psi(t_0,z))+C(M,z)+\int_{t_0}^{t_1}C(B(t,u(t)),\psi(t,z))dt],\forall u(\cdot)\in U_T.\end{aligned} \qquad (14)$$

Функция $\eta^0(z)$, $z\in R^s$, определенная формулой (13), является непрерывной, и поэтому существует z^0- точка глобального минимума этой функции на выпуклом компакте coZ. Учитывая это, из (14) получим

$$\begin{aligned}&C(D,\psi(t_0,z^0))+C(M,z)+\int_{t_0}^{t_1}C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z^0))dt\le\\&\le C(D,\psi(t_0,z^0))+C(M,z)+\int_{t_0}^{t_1}C(B(t,u(t)),\psi(t,z^0))dt,\forall u(\cdot)\in U_T.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z^0))dt] = \min_{u(\cdot)\in U_T} \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u(t)),\psi(t,z^0))dt = \int_{t_0}^{t_1} \min_{u\in U} C(B(t,u),\psi(t,z^0))dt .$$

Теперь, пологая $\psi^0(t) = \psi(t,z^0)$, и используя свойств интеграла Лебега, из последних равенств получим, что почти для всех $t \in T$ имеет место равенство (12).

Лемма 2. Если $u^0(t), t \in T$ – оптимальное управление в задаче (8), то каждая точка глобального минимума $z^0 \in Z$ функции (14) является, точкой глобального минимума функции

$$\mu(z) = C(D,\psi(t_0,z)) + C(M,z) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{u\in U} C(B(t,u)),\psi(t,z))dt , \ z \in coZ . \tag{15}$$

Утверждение леммы следует из следующей цепочки равенств:

$$\min_{u(\cdot)} \Phi(D,u(\cdot)) = \eta^0(z^0) = C(D,\psi(t_0,z^0)) + C(M,z^0) + \int_{t_0}^{t_1} C(B(t,u^0(t)),\psi(t,z^0))dt \geq$$

$$\geq C(D,\psi(t_0,z^0)) + C(M,z^0) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{u\in U} C(B(t,u),\psi(t,z^0))dt = \mu(z^0) \geq \min_{z\in coZ} \mu(z) = \min_{u(\cdot)\in U_T} \Phi(D,u(\cdot)) .$$

Теперь, используя лемму 3 и необходимую часть теоремы 1, получим следующий результат.

Теорема 2. Для оптимальности управления $u^0(t), t \in T$ в задаче (7) необходимо и достаточно существование точки глобального минимума $z^0 \in Z$ функции $\mu(z)$ вида (15) и выполнения условия (12) почти для всех $t \in T$.

Заключение. Полученные условия оптимальности в рассмотренной минимаксной задаче управления ансамблем траекторий системы (4) показывают, что для построения оптимального управления следует сначала разрешение конечномерной задачи оптимизации: $\mu(z) \to \min, z \in coZ$. Если $z^0 \in Z$ – решение этой задачи, то оптимальное управление $u^0(t), t \in T$ определяется из условия (12), как результат решения параметризованной задачи оптимизации: $C(B(t,u),\psi^0(t)) \to \min, u \in U, t \in T$.

Список литературы

1. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука,1988. - 280 с.
2. Кейн В.Н. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. – М.: Наука, 1985. – 248 с.
3. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М.: Наука ,1990. -432 с.
4. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. –М.: Наука, 1980. – 320 с.
5. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределённости М: Наука, 1977 – 392 с.
6. Константинов Г.Н. Достаточные условия оптимальности для минимаксной задачи управления ансамблем траекторий // Докл. АН СССР, 1987, Т. 297, № 2. – с. 287-290.
7. Otakulov S. On the minimization problem of reachable set estimation of control system. IFAC Workshop on Generalized Solution in Control Problems(GSCP-2004). Pereslavl-Zalessky, Russia, September 22-26, 2004. – p. 212-217.
8. Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. Монография. Lambert Academic Publishing, 2019. 144 с.
9. Минченко Л.И., Тараканов А.Н. Методы многозначного анализа в исследовании задач управления дифференциальными включениями с запаздыванием. Доклады БГУИР, 2004,№1. – с. 27-37.
10. Отакулов С., Хайдаров Т.Т. Негладкая задача оптимального управления для динамической системы с параметром. Central Asian Journal of Theoretical and Applied Sciences.Volume: 02 Issue: 10.| Oct 2021 ISSN: 2660-5317. pp. 132-138
11. Otakulov S., Sobirova G.D. On the model of control systems under conditions of indeterminacy. International conference «Mathematical analisis and its

applications to mathematical physics».September 17-20, 2018, Samarkand, Uzbekistan. Abstracts. Part II. –pp. 109-110.

12. Otakulov S., Kholiyarova F. Nonsmooth Optimal Control Problem For Model Of System With Delay Under Conditions Of Uncertainty External Influence. International Conference on Information Science and Communications Technologies: Applications, Trends and Opportunities. (ICISCT-2021). Tashkent, 3-5 November, 2021, 2021. Publiser: IEEE. pp.1-3.